

H. M. Ruck

Frankfurt M. 1975



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550826_0047

Relativistische Wellengleichungen zu höherem Spin

Ein möglicher Test mit komplexen Kernen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
vorgelegt beim Fachbereich Physik der Johann Wolfgang
Goethe-Universität zu Frankfurt am Main

von

Herbert Michael Ruck

aus Einbeck

Frankfurt am Main

1975

**Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Physik
der Universität Frankfurt am Main.**

Dekan: Prof. Dr. H. Klein

Erster Gutachter: Prof. Dr. W. Greiner

Zweiter Gutachter: Prof. Dr. R. Jelitto

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Dezember 1975

Abstract

The electromagnetic elastic scattering for identical spin 1 particles is investigated. Cross-sections and polarization are calculated within two relativistic spin 1 models: the Proca- and the Hurley model. The contribution of the electric monopole, magnetic dipole and electric quadrupole interaction in first order approximation are shown. Applied to the scattering of nuclei, one may learn about the polarization properties of particles with heavy masses. The differences between the model predictions may in principle distinguish between the models and constitute a test of the underlying wave equations.

Inhaltsverzeichnis

1.	<u>Einleitung</u>	5
2.	<u>Algebraische Eigenschaften der Spinwellen-</u> <u>gleichungen</u>	7
2.1	Lineare Spinwellengleichungen	7
2.2	Quadratische Spinwellengleichungen	11
2.3	Graphische Darstellung	12
3.	<u>Das Proca Modell</u>	16
3.1	Definition des Modells, Gleichungen und Lagrangefunktion	16
3.2	Transformationseigenschaften	17
3.3	Freie Lösungen	18
3.4	Elektromagnetische Wechselwirkung	21
3.5	Reduzierte Form der Ströme	27
3.6	Die Ströme in der zweiten Quantelung	31
3.7	Dichtematrizen	32
4.	<u>Das Hurley Modell</u>	34
4.1	Definition des Modells, Gleichungen und Lagrangefunktion	34
4.2	Transformationseigenschaften	36
4.3	Freie Lösungen	38
4.4	Elektromagnetische Wechselwirkung	39
4.5	Reduzierte Form des Stromes	42
4.6	Dichtematrizen	44

5.	<u>Streutheorie</u>	45
5.1	Der Streuoperator	47
5.2	Born'sche Näherung	50
5.3	Übergangsamplituden für die elastische Streuung von Teilchen mit verschiedenen Quantenzahlen	62
5.4	Kinematik	63
6.	<u>Nichtrelativistischer Grenzwert der Streuquer- schnitte und Zweikörperpotentiale</u>	64
6.1	Mott-Streuquerschnitte	64
6.2	Zweikörperpotentiale	66
7.	<u>Polarisation von Spin 1 Teilchen</u>	72
7.1	Vektor-und Tensorpolarisation	72
7.2	Analysierstärken	74
8.	<u>Quadrupolwechselwirkung</u>	76
8.1	Kovariante Kopplung des elektrischen Quadrupolmomentes	77
8.2	Empirische Kopplung des elektrischen Quadrupolmomentes	78
8.3	Beitrag des elektrischen Quadrupolmomentes zum Zweikörperpotential	79
9.	<u>Ergebnisse</u>	81
9.1	Streuung nichtpolarisierter Teilchen	84
9.2	Streuung polarisierter Teilchen (Polarisationseffekte)	86

Figurenbeschreibung	90
Figuren	95
Anhang 1. Definition der Spinmatrizen	107
Anhang 2. Die Ströme in der Proca Theorie	109
Anhang 3. Die Ströme in der Hurley Theorie	113
Anhang 4. Zweikörperpotentiale	120
Maßsysteme und Metrik	123
Eigenschaften einiger interessanter Kerne	
mit Spin 1	124
Literaturverzeichnis	125
Bezeichnungen	129
Danksagung	131
Lebenslauf	132

1. Einleitung

=====

Der Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind relativistische Wellengleichungen zu Spin größer als $1/2$. Zu einem bestimmten Spin ($s > \frac{1}{2}$) gibt es eine Vielzahl von Wellengleichungen. Zum Beispiel kennen wir für Spin 1 die Modelle von Proca¹, Kemmer², Stueckelberg³, Hurley⁴, Weinberg⁵, Nakanishi⁶, Shay⁷ und Hayward⁸.

Wir schlagen vor, diese Wellengleichungen mit Hilfe der Streuung von Schwerionen zu testen. Zur Begründung wählen wir zwei Wellengleichungen für Spin 1 Teilchen, die Proca Gleichung aus dem Jahre 1936 und ein neueres Modell - die Hurley Gleichung. Wir berechnen getrennt in jedem Modell die Streuquerschnitte für die elastische Streuung von polarisierten und unpolarisierten identischen Atomkernen (Li_3^6 , N_7^{14}), die im Grundzustand Spin 1 besitzen.⁹ Die Modellrechnungen werden miteinander verglichen, um festzustellen, unter welchen Bedingungen die Unterschiede zwischen den beiden Modellen meßbar werden. Eine gute Meßbarkeit ist gewährleistet, wenn die Unterschiede von der Größenordnung 10^{-3} sind. Spin 1 Mesonen spielen eine große Rolle in der Elementarteilchenphysik. Die ersten davon sind: $\rho(770)$, $\omega(783)$, $\phi(1019)$, $A_1(1100)$, $B(1235)$, $\rho'(1600)$, $K^*(892)$. Das hypothetische Isotriplett W_μ , als Quant

der schwachen Wechselwirkung hat ebenfalls Spin 1. Allerdings besitzt das erste elektrisch geladene Meson ρ eine Zerfallsbreite $\Gamma = (125 \pm 10)$ MeV. Eine Streuung $\rho + \rho \rightarrow \rho + \rho$ ist deswegen nicht unmittelbar durchführbar. Die einzigen stabilen Teilchen mit Spin 1 sind Atomkerne. Um Information über elastische elektromagnetische Streuquerschnitte bei Streuung von Kernen zu bekommen, muß der Stoß unterhalb der Coulombbarriere geführt werden, um die Anregung der Kerne und eine Interferenz mit den Kernkräften zu vermeiden. Außerdem dürfen die ausgewählten Kerne nicht stark radioaktiv sein, um ein Experimentieren zu ermöglichen.

Als Grundidee der vorliegenden Arbeit bemerken wir, daß die Reichhaltigkeit komplexer Kerne höheren Spins bei hinreichender Meßgenauigkeit Tests der Wellengleichungen für höhere Spins zuläßt.

Die Spin 1 Wellengleichungen stellen den Übergang zwischen den "problemlosen" Wellengleichungen wie Klein - Gordon, Dirac, Maxwell und den allgemein pathologischen Wellengleichungen für Spin > 1 dar. Einen Einblick in die Problematik der Wellengleichungen zu höherem Spin vermitteln die Arbeiten ^{10,11,13}.

2. Algebraische Eigenschaften der Spinwellen- ===== gleichungen =====

Die Wellengleichungen werden durch ihre Lorentztransformationseigenschaften charakterisiert.

2.1. Lineare Spinwellengleichungen

Eine lineare Wellengleichung wird allgemein als Matrixgleichung definiert ¹⁴, wobei wir uns auf einen skalaren Massenterm beschränken:

$$(i \beta_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - m) \Psi(x) = 0 \quad (2.1)$$

Unter einer Lorentztransformation, gegeben durch die Transformation der Koordinaten

$$x'_{\mu} = (\delta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}) x_{\nu} = a_{\mu\nu} x_{\nu} \quad , \quad (2.2)$$

transformieren sich die relativistischen Wellenfunktionen Ψ kovariant:

$$\Psi'_{\alpha}(\omega x) = \Delta_{\alpha\beta}(\omega) \Psi_{\beta}(x) \quad \alpha, \beta = \overline{1, 1} \quad (2.3)$$

$\Delta(\omega)$ ist eine 1-dimensionale Darstellung der linearen Lorentzgruppe $SL(2, C)$:

$$\Delta_{\alpha\beta}(\omega) = [\exp(\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} I_{\mu\nu})]_{\alpha\beta} \quad (2.4)$$

$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ sind die 6 Parameter der Gruppe $SL(2, C)$ und $I_{\mu\nu} = -I_{\nu\mu}$ die infinitesimalen Generatoren der Darstellung der Gruppe und des Feldes Ψ . Die Generatoren erfüllen den bekannten Kommutator

$$[I_{\mu\nu}, I_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho} I_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} I_{\mu\rho} - g_{\nu\rho} I_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} I_{\nu\rho}) \quad (2.5)$$

Die Invarianz der linearen Wellengleichung (2.1) unter (2.3) führt zu einer algebraischen Gleichung für die β_μ Matrizen

$$[I_{\mu\nu}, \beta_\sigma] = i(g_{\nu\sigma} \beta_\mu - g_{\mu\sigma} \beta_\nu) \quad (2.6)$$

Es gibt somit eine unmittelbare Beziehung zwischen den Darstellungen der Lorentzgruppe und den linearen relativistischen Wellengleichungen. Ebenso kann man die Poincarégruppe zur Bestimmung der Wellengleichung heranziehen. Die Wellenfunktion kann aus der Gleichung (2.1) oder (2.3) bestimmt werden. Die gruppentheoretische Methode sowie die Methode der Differentialgleichungen sind äquivalent.

Die Zahl der relativistischen Wellengleichungen in (2.6) kann weiter durch Forderungen an das Spin- und Massenspektrum sowie bestimmter Transformationseigenschaften der Gl. (2.1) unter Raum-, Zeitspiegelung und Ladungskonjugation eingeschränkt werden.

Es ist nützlich, sich die Unterschiede zwischen den verschiedenen Wellengleichungen an Hand der Darstellung der homogenen Lorentzgruppe klarzumachen, unter der die Wellengleichungen invariant sind. Wir verwenden die Beschreibung der irreduziblen Darstellung der homogenen Lorentzgruppe durch zwei Parameter ¹⁵ (s_1, s_2) .

Bestimmt werden die s_1 - und s_2 - Parameter als die Eigenwerte der Generatoren $\vec{X}$ und $\vec{Y}$:

$$\vec{X} = \vec{J} + i\vec{N} \quad (2.7)$$

$$\vec{X}^2 = s_1(s_1+1) I \quad (2.8)$$

und

$$\vec{Y} = \vec{J} - i\vec{N} \quad (2.9)$$

$$\vec{Y}^2 = s_2(s_2+1) I \quad (2.10)$$

$\vec{J}$ und $\vec{N}$ sind ihrerseits definiert als

$$\vec{J} = (I_{23}, I_{31}, I_{12}) \quad (2.11)$$

$$\vec{N} = (I_{01}, I_{02}, I_{03}) \quad (2.12)$$

Die Kommutatoren für $\vec{J}$, $\vec{N}$ und $\vec{X}$, $\vec{Y}$ sind

$$[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k \quad (2.13)$$

$$[N_i, N_j] = -i \epsilon_{ijk} J_k \quad (2.14)$$

$$[J_i, N_j] = i \epsilon_{ijk} N_k \quad (2.15)$$

$$[X_i, X_j] = i \epsilon_{ijk} X_k \quad (2.16)$$

$$[Y_i, Y_j] = i \epsilon_{ijk} Y_k \quad (2.17)$$

$$[X_i, Y_j] = 0 \quad (2.18)$$

Man sieht, daß $\vec{X}$, $\vec{Y}$ die Eigenschaften von Drehimpulsoperatoren erfüllen. Eine irreduzible Darstellung wird vollständig durch die beiden Parameter s_1 , s_2 definiert. Adjungierte Darstellungen der homogenen Lorentzgruppe werden durch Vertauschen von s_1 und s_2 erzeugt.

Direkte Summen von irreduziblen Darstellungen **ergeben** höhere (reduzible) Darstellungen der Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$:

$$\Delta = (s_1, s_2) \oplus (s_1', s_2') \oplus \dots \oplus (s_1^{(n)}, s_2^{(n)}) \quad (2.19)$$

2.2 Quadratische Spinwellengleichungen

Als nächstes definieren wir uns einen neuen Typ von Wellengleichungen zweiter Ordnung

$$(\beta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} - m^2) \Psi(x) = 0 \quad (2.20)$$

Die Invarianzbedingungen der Gl.(2.20) unter der Darstellung $\Delta(\omega)$ der homogenen Lorentzgruppe

$$\Psi'(x') = \Delta(\omega) \Psi(x) \quad (2.21)$$

ist:

$$\Delta(\omega)^{-1} \beta_{\mu\nu} \Delta(\omega) = a_{\mu\rho} a_{\nu\sigma} \beta_{\rho\sigma}, \quad (2.22)$$

wobei $a_{\mu\nu}$ in Gl. (2.2) definiert wird. Das Einsetzen der Darstellung (2.4) in Gl. (2.22) führt zu der algebraischen Gleichung für die Koeffizientenmatrizen

$$[I_{\rho\sigma}, \beta_{\mu\nu}] = i (\beta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} + \beta_{\sigma\nu} \delta_{\mu\rho}) \quad (2.23)$$

Bei Verwendung einer antisymmetrischen Lösung geht der Hauptterm $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ der Klein-Gordon-Gleichung ver-

loren, die in (2.20) enthalten sein muß. Deswegen definieren wir Gl. (2.20) um, indem wir den Quablaoperator abspalten.

$$(\beta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} + g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} - 2m^2) \Psi(x) = 0 \quad (2.24)$$

Für die neuen $\beta_{\mu\nu}$ -Matrizen gelten wieder die Gln. (2.23).

Beispiel: Shay-Good Modell.⁷

2.3 Graphische Darstellung

Über Gl. (2.6) und Gl. (2.23) stellen wir einen Zusammenhang her zwischen der Darstellung der homogenen Lorentzgruppe und der üblichen Beschreibung von Zuständen von Spin-Teilchen durch die Lösung der Differentialgleichungen.

In einem zweidimensionalen Koordinatensystem charakterisieren wir die Darstellung durch ein Netz von Punkten, die wir mit Linien verbinden. Es ergibt sich ein übersichtliches Klassifikationsschema der relativistischen Wellengleichungen.¹⁶⁻¹⁹

Wir geben einige Beispiele:

$(0,0)$ -Klein-Gordon

$(1/2, 1/2)$ -Proca

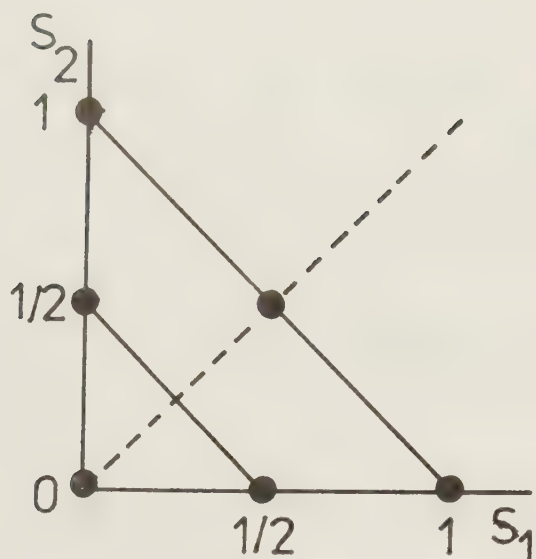
$(1,0) \oplus (1/2, 1/2) \oplus (0,1)$ -Kemmer

$(1/2,0)$ -Weyl

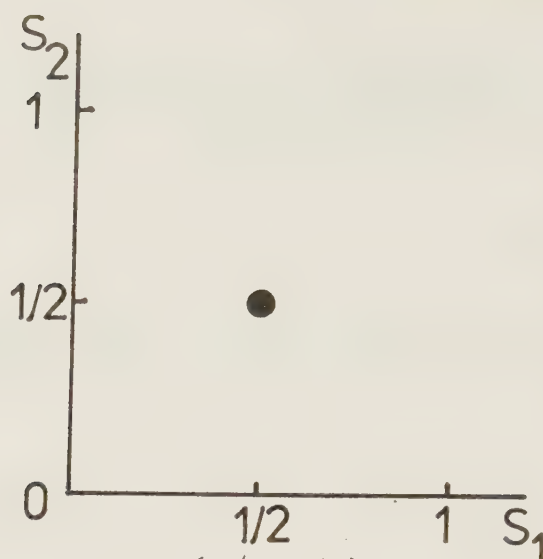
$(1/2,0) \oplus (0,1/2)$ -Dirac

$(1,0) \oplus (1/2, 1/2)$ und
 $(1/2, 1/2) \oplus (0,1)$ -Hurley

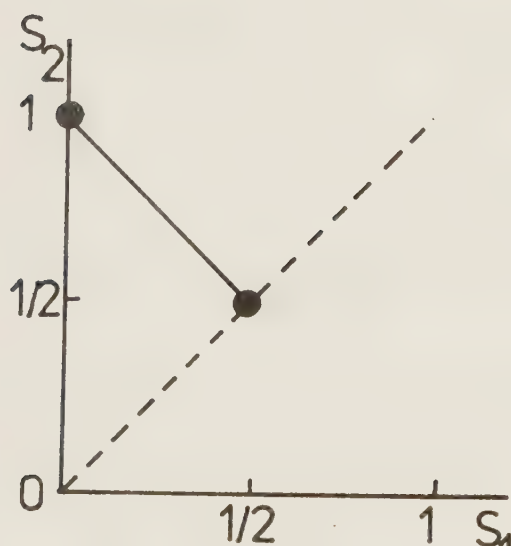
$(1,0) \oplus (0,1)$ -Shay-Good



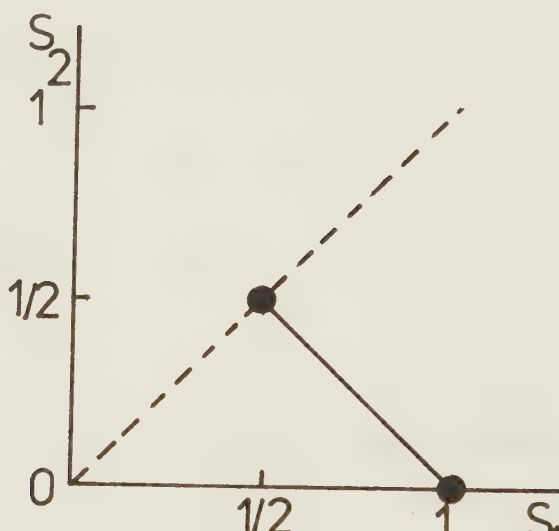
Klein-Gordon ; Dirac ;
Kemmer.



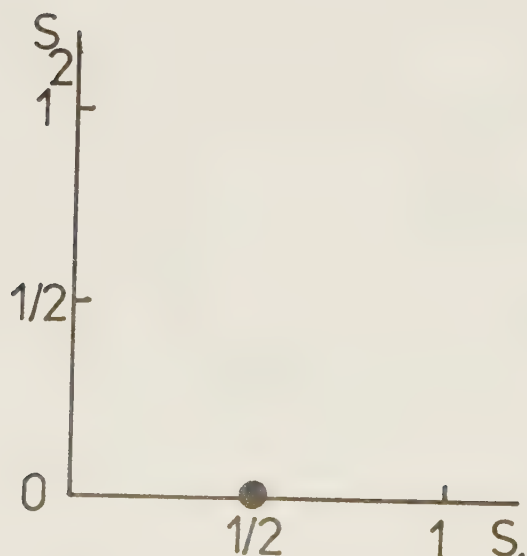
Proca $(1/2, 1/2)$



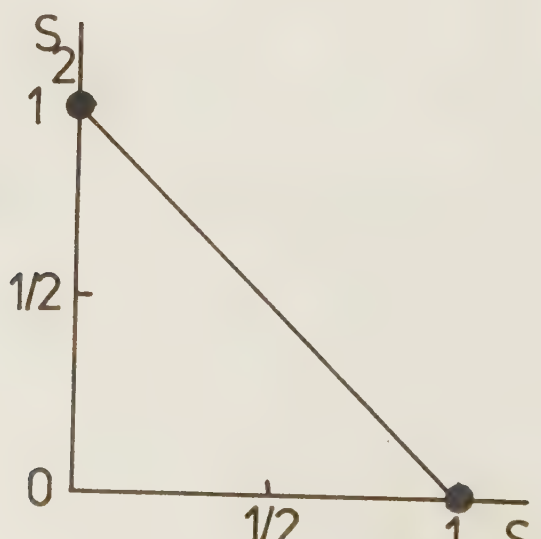
Hurley $(0,1) \oplus (1/2, 1/2)$



Hurley $(1,0) \oplus (1/2, 1/2)$



Weyl $(0, 1/2)$



Shay-Good $(1,0) \oplus (0,1)$

Man kann zeigen, daß die Darstellungen der Klein-Gordon-, Dirac- und Kemmertheorie selbstadjungiert sind, d.h. symmetrisch bezüglich der Diagonalen $\vec{X} = \vec{Y}^+$. Die Darstellungen der Hurley-Theorie sind nicht selbstadjungiert, da zwei Möglichkeiten existieren: eine unter - und eine oberhalb der ersten Diagonalen. Die Folge dieser Tatsache ist die Nichtinvarianz der Wellengleichungen unter Raumspe-
 lung und von da die Notwendigkeit, bilineare Kombi-
 nationen von Lösungen der Gleichungen $(1,0)+(1/2,1/2)$
 und $(0,1)+(1/2,1/2)$ zur Berechnung von meßbaren,
 paritätsinvarianten Größen zu verwenden.

3. Das Proca-Modell 1, 20, 21 =====

3.1. Definition des Modells: Gleichungen und Lagrangefunktion

Dieses erste relativistische Modell aus dem Jahre 1936 für Spin 1 Teilchen entstand als eine Erweiterung der Gleichungen des freien, elektromagnetischen Potentials der Elektrodynamik: $\square A_\mu(x) = 0, \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x) = 0$. Für schwere Vektorteilchen wird ein Massenterm eingeführt:

$$(\square + m^2) \varphi_\mu(x) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi_\mu(x) = 0 \quad (3.1)$$

$$\mu = 1, 2, 3, 4$$

φ_μ ist das massive Vektorfeld.

Die Lagrangefunktion zu diesen Gleichungen lautet:

$$L(x) = \frac{1}{2} G_{\mu\nu}^*(x) G_{\mu\nu}(x) - m^2 \varphi_\mu^*(x) \varphi_\mu(x) \quad (3.2)$$

$G_{\mu\nu}(x)$ ist ein antisymmetrisches Feld analog dem elektromagnetischen Feld:

$$G_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \varphi_\mu(x) \quad (3.3)$$

Wenn $G_{\mu\nu}(x)$ als unabhängiges Feld betrachtet wird, lauten die Feldgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} G_{\mu\nu}(x) + m^2 \varphi_\nu(x) = 0 \quad (3.4)$$

(3.3) und (3.4) sind zu (3.1) äquivalent. Die Nebenbedingung $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi_\mu = 0$ ist in Gl. (3.4) enthalten, wenn für das Vektorteilchen ein punktförmiges Massenspektrum gefordert wird; d.h.

$$p^2 = m^2$$

3.2 Transformationseigenschaften

Die Proca-Wellenfunktion transformiert sich wie ein Vierervektor mit der $(1/2, 1/2)$ Darstellung der linearen Lorentzgruppe $SL(2, C)$. Die Transformationseigenschaften eines Vierervektors werden in der Darstellung¹⁵

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \rightarrow \begin{vmatrix} x_0 - x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 + x_3 \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

abgeleitet. Die Generatoren dieser Transformation sind dann den Pauli-Matrizen proportional: $X = \frac{1}{2} \sigma, Y = -\frac{1}{2} \sigma$.

Wenn wir von der normalen Darstellung des Vektors als einer Spaltenmatrix ausgehen und die Generatoren der entsprechenden Lorentztransformation suchen:

$$\varphi'_\mu(x') = (\exp(i\omega_{\mu\nu} I_{\mu\nu}))_{\mu\nu} \varphi_\nu(x) \quad , \quad (3.6)$$

erhalten wir für $I_{\mu\nu}$ die Formel

$$I_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = i(g_{\alpha\mu} g_{\nu\beta} - g_{\alpha\nu} g_{\mu\beta}) \quad . \quad (3.7)$$

3.3 Freie Lösungen.

Die Wellengleichung (3.1) wird im Impulsraum gelöst.

Mit dem Ansatz

$$\varphi_\mu(x) = \epsilon_\mu(p) e^{ipx} \quad (3.8)$$

erhalten wir für die Gln. (3.1)

$$(p^2 - m^2) \epsilon_\mu(p) = 0 \quad (3.9)$$

sowie

$$p_\mu \epsilon_\mu(p) = 0 \quad . \quad (3.10)$$

Gl. (3.9) ist trivial und wird von jeder Funktion $\epsilon_\mu(p)$ gelöst. Die Lösung der Proca-Gleichung beschränkt sich somit auf die Lösung der Nebenbedingung (3.10).

In Polarkoordinaten, in denen der Teilchenimpuls durch

$$p_\mu = (E, +p \sin \theta \cos \varphi, +p \sin \theta \sin \varphi, +p \cos \theta) \quad (3.11)$$

definiert wird, lauten die Lösungen der Gl. (3.10)²²

$$\begin{aligned} \epsilon_\mu^{\rightarrow}(p, \lambda = +1) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} (0, \cos \theta \cos \varphi - i \sin \varphi, \cos \theta \sin \varphi \\ + i \cos \varphi, -\sin \theta) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_\mu^{\rightarrow}(p, \lambda = 0) = \left(\frac{p}{m}, -\frac{E}{m} \sin \theta \cos \varphi, -\frac{E}{m} \sin \theta \sin \varphi, \right. \\ \left. -\frac{E}{m} \cos \theta \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_\mu^{\rightarrow}(p, \lambda = -1) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} (0, -\cos \theta \cos \varphi - i \sin \varphi, \\ -\cos \theta \sin \varphi + i \cos \varphi, \sin \theta) \end{aligned} \quad (3.13a)$$

Die Wellenfunktionen genügen den Gln. (3.9) und (3.10), und erfüllen untereinander die Beziehungen²³

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu(p, \lambda) \epsilon_\nu^*(p, \lambda) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \quad (3.14)$$

Die unabhängigen Komponenten des Spinors sind Eigenfunk-

tionen des Helizitätsoperators (Skalarprodukt von Spin und Impuls):

$$\frac{1}{|\vec{p}|} \vec{S} \cdot \vec{p} \vec{\epsilon}(\vec{p}, \lambda) = \lambda \vec{\epsilon}(\vec{p}, \lambda). \quad (3.15)$$

λ ist die Helizität des Spin 1 Teilchens und $\frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$ der Helizitätsoperator.²⁴

Die Spinoren für beliebigen Impuls $\vec{p}$ und Helizität λ entstehen aus den Spinoren mit Impuls entlang der z-Achse und Helizität λ , die eine besonders einfache Struktur haben, nämlich:

$$\vec{\epsilon}(\lambda = +1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, +i, 0)$$

$$\vec{\epsilon}(\lambda = -1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -i, 0) \quad (3.15a)$$

$$\vec{\epsilon}(\lambda = 0) = (0, 0, 1)$$

durch eine Drehung des Koordinatensystems um die Winkel θ und φ , so daß $\vec{p}_z$ mit dem Impuls des Teilchens $\vec{p}$ übereinstimmt: Die zeitlichen Komponenten werden ergänzt, so daß die Eichbedingung (13.10) erfüllt wird.

3.4 Elektromagnetische Wechselwirkung

Eine relativistisch kovariante Kopplung der elektromagnetischen Potentiale wird erstens durch eine minimale Kopplung²⁵ der elektromagnetischen Potentiale, zweitens durch die Kopplung des elektromagnetischen Feldtensors an die Generatoren der Lorentzgruppe und drittens durch die Kopplung der Divergenz des e.m. Feldtensors an einen Tensor vierter Stufe erreicht. Die erste Kopplung ist dem elektrischen Formfaktor proportional, den wir punktförmig wählen (gleich Z -der Ladungszahl). Der zweite Kopplungsterm ist dem magnetischen Formfaktor g_m proportional, und der dritte Term ist dem Quadrupolmoment des Teilchens proportional. Wir betrachten vorerst die beiden wichtigsten Terme, die für die Monopol- und magnetische Dipolwechselwirkung bestimmend sind. Die Lagrangedichte lautet:

$$\begin{aligned}
 L(x) = & \frac{1}{2} (\pi_\mu^* \varphi_\nu^*(x) - \pi_\nu^* \varphi_\mu^*(x)) (\pi_\mu \varphi_\nu(x) - \pi_\nu \varphi_\mu(x)) \\
 & - m^2 \varphi_\mu^*(x) \varphi_\mu(x) + \frac{1}{2} g_m F_{\mu\nu}(x) \varphi_\alpha^*(x) I_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \varphi_\beta(x) \\
 & + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}(x) F_{\alpha\beta}(x).
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$A_\mu(x)$ ist das elektromagnetische Potential und

$$\pi_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} - i Z e A_\mu(x) \tag{3.17}$$

ist der verallgemeinerte Impulsoperator mit dem komplex Konjugierten

$$\pi_{\mu}^* = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + i Ze A_{\mu}(x) \quad (3.18)$$

Ze ist die elektrische Ladung der wechselwirkenden Teilchen.

$$F_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} A_{\beta}(x) - \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} A_{\alpha}(x) \quad (3.19)$$

ist der elektromagnetische Feldtensor,

$$G_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \varphi_{\beta}(x) - \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \varphi_{\alpha}(x) \quad (3.20)$$

der "Feldtensor" des schweren Teilchens.

$I_{\mu\nu}$ sind die in Kapitel 2 definierten Generatoren der Lorentzgruppe.

Der magnetische Formfaktor g_m wird im Impulsraum bestimmt, so daß das magnetische Moment der Teilchen dem experimentellen Wert entspricht.

Wir schreiben die Lagrangedichte (3.16) als eine Summe der freien Lagrangedichte mit einen Wechselwirkungsterm:

$$L(x) = L_o(x) + L_w(x) \quad (3.21)$$

$L_w(x)$ ist von den Potentialen A_μ abhängig und kann als Summe von Viererprodukten der elektromagnetischen Potentiale mit elektromagnetischen Strömen dargestellt werden :

$$L_w(x) = j_\mu(x) A_\mu(x) + j_{\mu\nu}(x) A_\mu(x) A_\nu(x) \quad (3.22)$$

Die in Gl. (3.22) definierten elektromagnetischen Ströme sind die ersten und zweiten Funktionalableitungen der Lagrangedichte nach $A_\mu(x)$:

$$j_\mu(x) = \frac{\delta L(x)}{\delta A_\mu(x)} \Big|_{A_\mu(x)=0} \quad (3.23)$$

$$j_{\mu\nu}(x) = \frac{\delta^2 L(x)}{\delta A_\mu(x) \delta A_\nu(x)} \quad (3.24)$$

Die Ströme (3.23) und (3.24) enthalten die gesamte Dynamik und Kinematik der elektromagnetischen Wechselwirkung der Spin 1 Teilchen. In dem folgenden Abschnitt betrachten wir die Struktur der Ströme im Impulsraum etwas genauer. Ebenso wie im Ortsraum sind die Ströme im Impulsraum durch Funktionalableitungen gegeben. Als Beweis transformiert man die Lagrangedichte und die Felder:

$$L(x) = \int d\vec{p}' d\vec{p} L(p', p, q) e^{i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{x}}$$

$$q_\mu = p'_\mu - p_\mu \quad (3.25)$$

$$\epsilon_\mu(x) = \int d^4p \epsilon_\mu(p, \lambda) e^{ipx} \quad (3.26)$$

$$A_\mu(x) = \int d^4q A_\mu(q) e^{iqx} \quad (3.27)$$

Die Ströme sind von zwei Impulsen abhängig und beschreiben den Übergang aus dem Zustand mit Impuls p in den Zustand mit Impuls p'

$$j_\mu(p', p) = \frac{\delta L(p', p, q)}{\delta A_\mu(q)} \Big|_{A_\mu(q) = 0} \quad (3.28)$$

$$j_{\mu\nu}(p', p) = \frac{\delta^2 L(p', p, q)}{\delta A_\mu(q) \delta A_\nu(q)} \quad (3.29)$$

Die Ströme werden im Impulsraum berechnet. Dieses ist insofern sinnvoll, als die folgenden Störungsrechnungen ebenfalls im Impulsraum durchgeführt werden. Wie schon gesagt, beschreiben die Ströme im Impulsraum den Übergang aus einem Zustand mit Impuls p und Polarisation λ in einem Zustand mit Impuls p' und Polarisation λ' . Die Struktur der Ströme ist bilinear in den Spinoren ϵ_μ .

Der Einphotonenstrom²³

Nach Gl. (3.28) folgt der Einphotonenstrom aus dem in A_μ linearen Teil der Lagrangedichte (3.16), den wir mit L_1 bezeichnen. Im Ortsraum lautet dieser Teil:

$$\begin{aligned}
 L_1(x) = & -\frac{1}{2} [iZe(A_\mu(x)\varphi_\nu^*(x) - A_\nu(x)\varphi_\mu^*(x))G_{\mu\nu}(x) \\
 & - iZe G_{\mu\nu}^*(x)(A_\mu(x)\varphi_\nu(x) - A_\nu(x)\varphi_\mu(x))] \quad (3.30) \\
 & + ig_m F_{\mu\nu}(x)\varphi_\mu^*(x)\varphi_\nu(x)
 \end{aligned}$$

Die Fouriertransformierte von L_1 ist

$$\begin{aligned}
 L_1(p', p, \lambda', \lambda) = & \epsilon_\rho^*(p', \lambda') (Ze A_\mu(q)(p' + p)_\mu \delta_{\rho\lambda} \\
 & - Ze A_\lambda(q)p_\rho - Ze A_\rho(q)p'_\lambda) \quad (3.31) \\
 & + g_m \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\lambda} (A_\nu(q)(p' - p)_\mu - A_\mu(q)(p' - p)_\nu) \epsilon_\lambda(p)
 \end{aligned}$$

Wir können nun die Funktionalableitung durchführen, und erhalten den Strom

$$\begin{aligned}
 j_\sigma(p', p, \lambda', \lambda) = & \epsilon_\rho^*(p', \lambda') [Ze(p' + p)_\sigma \delta_{\rho\sigma} - Ze p_\rho \delta_{\lambda\sigma} \\
 & - Ze p'_\lambda \delta_{\sigma\rho} + g_m ((p' - p)_\rho \delta_{\lambda\sigma} - (p' - p)_\lambda \delta_{\rho\sigma})] \epsilon_\lambda(p, \lambda) \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

In Gl.(3.32) ist der Strom eine skalare Funktion der Teilcheneigenschaften und der kinematischen Größen. Der von den Spinoren unabhängige Teil des Stromes bildet die "Strommatrix", die komponentenweise aus der Gl. (3.32) abzulesen ist:

$$j_{\sigma}^{\rho\lambda}(p',p) = Ze((p'+p)_{\sigma} \delta_{\rho\lambda} - p_{\rho} \delta_{\lambda\sigma} - p'_{\lambda} \delta_{\sigma\rho}) \quad (3.33) \\ + g_m((p'-p)_{\rho} \delta_{\lambda\rho} - (p'-p)_{\lambda} \delta_{\rho\sigma})$$

Der Zweiphotonenstrom

Der Zweiphotonenstrom in der Proca-Theorie folgt aus dem in A_{μ} quadratischen Term der Lagrangedichte (3.16). Dieser Term ist übersichtlicher als (3.31), so daß wir auf ein Ausschreiben verzichten. Nach Formel (3.24) erhalten wir den Zweiphotonenstrom im Ortsraum:

$$j_{\sigma\rho}(x) = \frac{1}{2}(Ze)^2 [\delta_{\sigma\rho} \varphi_{\nu}^*(x) \varphi_{\nu}(x) - \varphi_{\rho}^*(x) \varphi_{\sigma}(x) - \varphi_{\sigma}^*(x) \varphi_{\rho}(x) \\ + \delta_{\sigma\rho} \varphi_{\mu}^*(x) \varphi_{\mu}(x)] \quad (3.34)$$

Die Strommatrix in (3.34) enthält keine Ableitungen, und ist somit im Ortsraum wie im Impulsraum gleich:

$$j_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(p', p, \lambda', \lambda) = (Ze)^2 [2\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta} - \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\nu\alpha}\delta_{\mu\beta}] \quad (3.35)$$

Der Zweiphotonenstrom führt in der Störungsrechnung zu quadrilinearen Termen (Möven-Graphen).

3.5 Reduzierte Form der Ströme

Die Strommatrizen (3.33), (3.35) sind 4 x 4 dimensional. Für die Berechnung von Streuquerschnitten ist es vorteilhaft, die Strommatrizen auf eine 3 x 3 dimensionale Darstellung entsprechend der Zahl der Freiheitsgrade umzuformen. Zu diesem Zweck ersetzen wir die abhängigen Komponenten der Spinoren ϵ_μ aus den Nebenbedingungen (3.10):

$$\epsilon_0(p, \lambda) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}(p, \lambda)}{E} \quad (3.36)$$

und

$$\epsilon_0^*(p', \lambda') = - \frac{\vec{p}' \cdot \vec{\epsilon}^*(p', \lambda')}{E} \quad (3.37)$$

und setzen sie in Gl. (3.32) und (3.34) ein.

$$\begin{aligned} j_\mu(p', \lambda', p, \lambda) &= \epsilon_1^*(p', \lambda') \left\{ j_\mu^{1k}(p', p) - j_\mu^{10}(p', p) \frac{p_k}{E} + \right. \\ &+ \frac{p'_1}{E} j_\mu^{0k}(p', p) - \frac{p'_1 p_k}{E^2} j_\mu^{00}(p', p) \left. \right\} \epsilon_k(p, \lambda) = \\ &\epsilon_1^*(p', \lambda') j_\mu^{1k}(p', p) \epsilon_k(p, \lambda) \quad ; \quad 1, k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Der Einphotonenstrom enthält als einzige freie Funktion den magnetischen Formfaktor. Dieser wird aus der Wechselwirkungsenergie bestimmt, in der der magnetische Term proportional dem magnetischen Moment des Teilchens sein muß:

$$W = g \mu \vec{S} \vec{H} \quad (3.39)$$

$g \mu \vec{S}$ ist das magnetische Dipolmoment des Teilchens, $\vec{H}$ das äußere Magnetfeld. Die Daten für die Dipolmomente entnehmen wir den Tabellen für Elementarteilchen bzw. Kerneigenschaften. Für Atomkerne, deren magnetische Momente in Kernmagnetonen gemessen werden, gilt

$$\mu = \frac{e}{2 m_p} g, \quad g = g_n + g_a.$$

Daraus folgt:

$$g_m = -Ze \left(1 - g \frac{m}{Z m_p} \right) \quad (3.40)$$

(siehe Anhang 2)

Z ist die Ladungszahl des Kernes, m seine Masse, m_p die Protonenmasse und g der gesamte g -Faktor (Landé Faktor). Der g -Faktor setzt sich zusammen aus

dem "normalen" g-Faktor, der dem reziproken Wert des Spins gleich ist, $g_n = 1/s$, und dem "anormalen" g-Faktor, der in verschiedenen Modellen selbst berechnet wird, hier aber als dynamischer Beitrag zur elektromagnetischen Wechselwirkung dem Experiment angepaßt wird.

Wir geben die 3×3 Strommatrix getrennt nach Raum- und Zeitkomponenten an. Die ein- und auslaufenden Impulse sind $p = (E, \vec{p})$ bzw. $p' = (E, \vec{p}')$:

$$j_0(p', p) = 2ZeE - \frac{1}{E}(2m\mu - Ze)(\vec{K}^+ \vec{q} \vec{K} \vec{p} - \vec{K}^+ \vec{p}' \vec{K} \vec{q}) + \frac{Ze}{E}(\vec{K}^+ \vec{p}' \vec{K} \vec{p}' + \vec{K}^+ \vec{p} \vec{K} \vec{p}) \quad (3.41)$$

$$\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p}; \quad j_0(p', p) = j_0^+(p, p')$$

und

$$\vec{j}(p', p) = Ze(\vec{p}' + \vec{p}) + 2im\mu \vec{S} \times \vec{q} - \frac{Ze}{2}(\vec{p}' + \vec{p}) \vec{K}^+ \vec{p}' \vec{K} \vec{p} \quad (3.42)$$

Die Normierung ist durch

$$j_0(\vec{p}, \vec{p}) = Ze \, 2m \quad (3.43)$$

festlegt, d.h. die Norm eines Einteilchenzustandes im Ruhesystem ist

$$\langle p' | p \rangle = 2 Ze \, m \quad (3.44)$$

Man sieht sofort, daß der Erhaltungssatz des Stromes im Impulsraum erfüllt ist:

$$q_\mu j_\mu(p', p) = 0 \quad ; \quad q_\mu = (0, \vec{p}' - \vec{p}) \quad , \quad (3.45)$$

und somit die Eichinvarianz der Theorie gewährleistet wird.

Die Struktur des Zweiphotonenstromes $j_{\lambda\sigma}$ ist eine Verallgemeinerung der Gleichung (3.38)

$$j_{\lambda\sigma}(p', \lambda', p, \lambda) = \epsilon_1^*(p', \lambda') j_{\lambda\sigma}^{1k}(p', p) \epsilon_k(p, \lambda) \quad (3.46)$$

mit den Strommatrizen

$$j_{oo}^{1k}(p', p) = -Z^2 e^2 \delta_{1k} \quad (3.47)$$

$$j_{ot}^{1k}(p', p) = Z^2 e^2 \left(\frac{p'_1}{E} \delta_{tk} - \frac{p_k}{E} \delta_{t1} \right) \quad (3.48)$$

$$j_{ot}^{1k} = j_{to}^{1k} \quad (3.49)$$

$$j_{st}^{1k}(p', p) = -Z^2 e^2 \left[2\delta_{st} \left(\delta_{k1} - \frac{p'_1 p_k}{E^2} \right) - \delta_{s1} \delta_{tk} - \delta_{t1} \delta_{sk} \right] \quad (3.50)$$

3.6 Die Ströme in der zweiten Quantelung

Spin 1 Teilchen gehorchen der Bose Statistik. Dieser Tatsache muß in einer Wechselwirkung zweier Spin 1 Teilchen über elektromagnetische Kräfte Rechnung getragen werden. Wir quanteln die Theorie nicht auf dem Niveau der Felder sondern auf dem der Ströme. Im Impulsraum lautet der Stromoperator

$$\hat{j}_{\mu}(p', \lambda', p, \lambda) = j_{\mu}(p', \lambda', p, \lambda) a^+(p', \lambda') a(p, \lambda) \quad (3.51)$$

und

$$\hat{j}_{\mu\nu}(p', \lambda', p, \lambda) = j_{\mu\nu}(p', \lambda', p, \lambda) a^+(p', \lambda') a(p, \lambda) \quad (3.52)$$

a^+ , a sind Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der Bose-Statistik

$$[a(p', \lambda'), a^+(p, \lambda)] = \delta(p' - p) \delta_{\lambda\lambda'} \quad (3.53)$$

$$a^+(p, \lambda) | 0 \rangle = | p, \lambda \rangle \quad (3.54)$$

$$a(p, \lambda) | 0 \rangle = 0 \quad (3.55)$$

3.7 Dichtematrizen

Wir betrachten nun die noch offene Frage der Polarisierung. Die ϵ_μ Spinoren müssen der Gl. (3.1) genügen und einem Polarisationszustand entsprechen, dem wir die Quantenzahl λ zuordnen. Der Polarisationszustand wird durch die Projektion des Spins auf eine räumliche Achse gekennzeichnet.

1. Durch Projektion des Spins auf die z-Achse erhält man die Magnetquantenzahl-Darstellung. In diesem Fall sind die unabhängigen Komponenten des Spinors Eigenfunktionen der dritten Komponente des Spinoperators.
2. Durch die Projektion des Spins auf den Impuls des Teilchens erhält man die Helizitätsdarstellung.²⁴ Die Definitionsgleichung ist (3.15). Diese Darstellung ist besonders zur Beschreibung relativistischer Reaktionen geeignet, da λ rotationsinvariant ist. Aus der Nebenbedingung $p_\mu \epsilon_\mu(p, \lambda) = 0$ ist ersichtlich, daß bei einer Drehung des Impulses sich die Spinoren mitdrehen.

Zur Beschreibung der Polarisierung wählen wir die Helizitätsdarstellung, die von der Nebenbedingung in dem Proca-Modell geradezu gefordert wird.

Wir definieren nun Dichtematrizen, die die statistische Verteilung der Polarisationen (Helizitäten) in einem Teilchenstrahl beschreiben.

$$\rho(p) = \sum_{\lambda = \pm 1, 0} w(\lambda) |p, \lambda\rangle \langle p, \lambda| \quad (3.56)$$

$w(\lambda)$ ist das statistische Gewicht des Polarisationszustandes $|p, \lambda\rangle$. $|p, \lambda\rangle$ ist allgemein die Zustandsfunktion. In unserem Fall entspricht $|p, \lambda\rangle$ den Raumkomponenten der Spinoren (3.12) - (3.14). Die Komponenten der Dichtematrix sind

$$\rho^{lk}(p) = \sum_{\lambda = \pm 1, 0} w(\lambda) \epsilon_l(p, \lambda) \epsilon_k^*(p, \lambda) \quad (3.57)$$

$l, k = 1, 2, 3$.

4. Das Hurley Modell ⁴

=====

Da wir komparative Physik betreiben, ist es notwendig, gleiche Methoden anzuwenden, um die Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu sichern. Aus diesem Grunde ist Kapitel 4 in der Struktur Kapitel 3 gleich. Es werden dieselben Größen berechnet: Ströme und Dichtematrizen im Impulsraum, wobei eine dem Modell entsprechende Rechentechnik angewendet wird.

4.1 Definition des Modells: Gleichungen und Lagrangefunktion

Das besondere an diesem Modell ist die gleichberechtigte Existenz zweier Wellengleichungen, deren Ursache in der Eigenschaft der $(1,0)+(1/2,1/2)$ -Darstellung der linearen Lorentzgruppe liegt, nicht selbstadjungiert zu sein. Die adjungierte Darstellung $(0,1)+(1/2,1/2)$ bestimmt nun eine zweite Wellengleichung. Wir unterscheiden beide Wellengleichungen durch einen zweiwertigen Parameter $\epsilon = \pm 1$. Die Gleichungen sind linear und haben die Form der Diracgleichung:

$$(i\beta_{\mu}^{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - m) \psi_{\epsilon}(x) = 0 \quad (4.1)$$

Die β -Matrizen lauten

$$\beta_0^\epsilon = \begin{vmatrix} 1 & . & . \\ . & -1 & . \\ . & . & . \end{vmatrix}; \quad \vec{\beta}^\epsilon = \begin{vmatrix} . & \vec{S} & \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{K}^+ \\ -\vec{S} & . & \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{K}^+ \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{K} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{K} & . \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

$\vec{S}$ und $\vec{K}$ sind die Spinoperatoren aus Anhang 1, m ist die Masse des Teilchens. Die Zahl der Wellenkomponenten für Spin 1 beträgt sieben. Dieses Modell ist für beliebigen Spin $s \geq 1$ definierbar, indem für $\vec{S}$ und $\vec{K}$ die entsprechenden Matrizen eingesetzt werden.

Wir konzentrieren uns auf den Spin 1 Fall, für den wir den Vergleich mit der Proca-Theorie anstreben. Man sieht, daß die β_0 -Matrix ϵ -unabhängig ist, und daß für die räumlichen Komponenten durch hermitische Konjugation das Vorzeichen von ϵ geändert wird:

$$\beta_0^{(+1)} = \beta_0^{(-1)}; \quad \vec{\beta}^{(+1)} = \vec{\beta}^{(-1)^\dagger} \quad (4.3)$$

Formal können die Wellengleichungen (4.1) aus der freien Lagrangedichte $(\beta_\mu^{(+1)} \equiv \beta_\mu)$

$$\begin{aligned}
 L(x) = & \psi_{-}^{+}(x) \left(i\beta_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - m \right) \psi_{+}(x) \\
 & + \psi_{+}^{+}(x) \left(-i\beta_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - m \right) \psi_{-}(x)
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

abgeleitet werden. Die Gln. (4.1) sind nicht paritätsinvariant (es gibt keinen Operator, der mit β_0 kommutiert und gleichzeitig mit $\vec{\beta}$ antikommutiert), während die Lagrangefunktion (4.4) als bilineare Kombination von Wellenfunktionen mit verschiedenem ϵ paritätsinvariant ist. Da Lagrangedichte und Wellengleichungen verschiedene Symmetrien besitzen, sind streng genommen die Gln. (4.1) nicht die Euler-Lagrange Gleichungen von (4.4). Die Formulierung (4.4) ist somit widersprüchlich. Wir behalten die Lagrangefunktion (4.4) trotzdem bei, da sie uns beim Auffinden der elektromagnetischen Ströme hilft, an denen wir letztlich interessiert sind.

4.2 Transformationseigenschaften des Modells.

Für $\epsilon = +1$ transformieren sich die Wellenfunktionen $\psi_{+}(x)$ nach der $(1,0)+(1/2,1/2)$ Darstellung, für $\epsilon = -1$ transformieren sich die $\psi_{-}(x)$ Wellenfunktionen nach der $(0,1)+(1/2,1/2)$ Darstellung. Die Generatoren selbst sind ϵ - abhängig:

$$\psi_{\epsilon}'(x') = e^{\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} I^{(\epsilon)}_{\mu\nu}} \psi_{\epsilon}(x). \quad (4.5)$$

Wir definieren:

$$\vec{J} = (I_{23}, I_{31}, I_{12}) \quad , \quad \vec{N} = (I_{01}, I_{02}, I_{03}) \quad (4.6)$$

$$J_i = U^+ \begin{vmatrix} S_i & \cdot & \cdot \\ \cdot & S_i & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} U = \begin{vmatrix} S_i & \cdot & \cdot \\ \cdot & S_i & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad (4.7)$$

$$N_i = -i\epsilon U^+ \begin{vmatrix} S_i & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & K_i^+ \\ \cdot & K_i & \cdot \end{vmatrix} U = -\frac{i}{2} \begin{vmatrix} S_i & S_i & \sqrt{2}K_i^+ \\ S_i & S_i & -\sqrt{2}K_i^+ \\ \sqrt{2}K_i & -\sqrt{2}K_i & \cdot \end{vmatrix} \quad (4.8)$$

U ist eine unitäre Matrix:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot \\ 1 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sqrt{2} \end{vmatrix}, \quad U^+ = U. \quad (4.9)$$

Durch Vertauschen von ϵ gehen die $\vec{X}$ und $\vec{Y}$ Generatoren (2.7), (2.8) ineinander über:

$$\epsilon = +1 \quad (\vec{X}, \vec{Y}) : \quad \epsilon = -1 \quad (\vec{Y}, \vec{X}).$$

Wegen $\vec{X} \neq \vec{Y}^+$ sind die beiden Darstellungen nicht selbstadjungiert. Im Falle der Dirac- und Proca-Theorie gilt $\vec{X} = \vec{Y}^+$: die Darstellungen sind selbstadjungiert.

4.3 Freie Lösungen

Wir suchen die freien Lösungen als ebene Wellen:

$$\psi_{\epsilon}(x) = u_{\epsilon}(p) e^{-ipx} \quad (4.10)$$

Die Lösung für $u_{\epsilon}(p, \lambda)$ ist:

$$u_{\epsilon}(p, \lambda) = N \left\| \begin{array}{c} m + E - \epsilon \vec{S} \vec{p} \\ m - E + \epsilon \vec{S} \vec{p} \\ \sqrt{2} \epsilon \vec{K} \vec{p} \end{array} \right\| f_{\lambda} . \quad (4.11)$$

Man sieht, daß die Änderung des Vorzeichens von ϵ einer Umkehrung des Vorzeichens des Impulses $\vec{p}$ entspricht:

$$u_{+}(p, \lambda) := u(p, \lambda); u_{-}(p, \lambda) = u(-p, \lambda) \quad (4.12)$$

f_{λ} ist ein Eigenzustand zur Helizität λ , wobei die in (4.11) vorkommenden Spinmatrizen durch den Levi-Civita Tensor dargestellt werden (Anhang 1):

$$\frac{1}{|\vec{p}|} \vec{S} \vec{p} f_{\lambda} = \lambda f_{\lambda} \quad (4.13)$$

Für die Helizitätsspinoren f_{λ} verwenden wir die räumlichen Teile der Helizitätsspinoren der Proca-Theorie.

Für $\lambda = 0$ wird in dem Proca Spinor der Faktor E/m weggelassen. D.h. in Kugelkoordinaten für einen Impuls:

$$p_\mu = (E, +p \sin \theta \cos \varphi, +p \sin \theta \sin \varphi, +p \cos \theta) \quad (4.14)$$

lauten die Lösungen der Gl. (4.13)

$$f_i(\vec{p}, \lambda=+1) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} (\cos \theta \cos \varphi - i \sin \varphi, \quad (4.15) \\ \cos \theta \sin \varphi + i \cos \varphi, -\sin \theta)$$

$$f_i(\vec{p}, \lambda=-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} (-\cos \theta \cos \varphi - i \sin \varphi, \quad (4.16) \\ -\cos \theta \sin \varphi + i \cos \varphi, \sin \theta)$$

$$f_i(\vec{p}, \lambda = 0) = (-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, -\cos \theta) \quad (4.17)$$

4.4 Elektromagnetische Wechselwirkung

Die Lagrangedichte mit gekoppelten elektromagnetischen Potentialen und Feldern ist:

$$L(x) = \bar{\psi}_-(x) (i\beta_\mu \pi_\mu - m) \psi_+(x) + \bar{\psi}_+^*(x) (-i\beta_\mu \pi_\mu^+ - m) \psi_-(x) \\ + g_m F_{\mu\nu}(x) (\bar{\psi}_-(x) I_{\mu\nu} \psi_+(x) + \bar{\psi}_+^*(x) I_{\mu\nu}^+ \psi_-(x)) \quad (4.18) \\ + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x)$$

g_m ist der magnetische Formfaktor, $I_{\mu\nu}$ sind die Generatoren der $(1,0) \oplus (1/2, 1/2)$ Darstellung der homogenen Lorentzgruppe,

$$\pi_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} - i Ze A_\mu(x) \quad (4.19)$$

der verallgemeinerte Impulsoperator und

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu(x) \quad (4.20)$$

der elektromagnetische Feldtensor.

Die elektrischen und magnetischen Formfaktoren sind punktförmig, d.h. sie sind unabhängig von dem Impulsübertrag.

Die elektromagnetischen Ströme werden als Funktionalableitung der Lagrangedichte nach dem elektromagnetischen Potential definiert:

$$j_\mu(x) = \frac{\delta L(x)}{\delta A_\mu(x)} \quad (4.21)$$

Im Gegensatz zur Proca Theorie treten hier keine "Zweiphotonenströme" $j_{\mu\nu}(x)$ auf. Zur Berechnung der Ströme verwenden wir die freien Lösungen der Wellengleichungen.

Im Impulsraum ist der Strom:

$$j_{\mu}(p', p) = \frac{\delta L(p, p', q)}{\delta A_{\mu}(q)}, \quad (4.22)$$

wobei die Lagrangedichte im Impulsraum aus der Fouriertransformation folgt:

$$L(x) = \int d^3 p' d^3 p L(p', p, q) e^{-i(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{x}} \quad (4.23)$$

Wir setzen in die Lagrangedichte (4.4) die klassischen Felder in ihren Fourierdarstellungen ein:

$$\psi_{-}(x) = \int d^4 p u(-p, \lambda) e^{-ipx} \quad (4.24)$$

$$\psi_{+}(x) = \int d^4 p u(p, \lambda) e^{-ipx} \quad (4.25)$$

$$A_{\mu}(x) = \int d^4 q A_{\mu}(q) e^{-iqx} . \quad (4.26)$$

Alle Felder, die auslaufenden Teilchen entsprechen, tragen den Impuls p' , die Felder der einlaufenden Teilchen den Impuls p . Laut Definition (4.23) folgt nach Differenzieren bezüglich x und Integration über q ($q = p' - p$) die Lagrangedichte im Impulsraum:

$$L_w(p', p) = u^{+}(-p', \lambda') \beta_{\mu} Z e A_{\mu}(q) u(p, \lambda) \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} & + u^{+}(p', \lambda') \beta_{\mu}^{+} Z e A_{\mu}(q) u(-p, \lambda) \\ & - 2i g_m q_{\nu}(q) (u^{+}(-p', \lambda') I_{\mu\nu} u(p, \lambda) \\ & + u^{+}(p', \lambda') I_{\mu\nu}^{+} u(-p, \lambda)) A_{\mu}(q) . \end{aligned}$$

Der elektromagnetische Strom ergibt sich aus (4.22) und (4.27):

$$\begin{aligned}
 j_{\mu}(p', \lambda', p, \lambda) = & u^+(-p', \lambda') \beta_{\mu} Z e u(p, \lambda) \\
 & + u^+(p', \lambda') \beta_{\mu}^+ Z e u(-p, \lambda) \\
 & + 2i g_m q_{\nu} (u^+(-p', \lambda') I_{\mu\nu} u(p, \lambda) \\
 & + u^+(p', \lambda') I_{\mu\nu}^+ u(-p, \lambda)) .
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

4.5 Die reduzierte Form des Stromes

Der Strom (4.28) ist eine bilineare Form in u_+ und u_- . Wir spalten (wie im Falle des Proca-Modells) die linear unabhängigen Komponenten der Wellenfunktion ab. Die physikalischen Komponenten sind in diesem Fall die f_{λ} . Die Reduktion erfolgt durch Ausmultiplizieren der u_+ und u_- Spaltenmatrizen, die von der Energie und dem Impuls abhängen, und der β_{μ} sowie $I_{\mu\nu}$ - Matrizen, ohne die $\vec{S}$ - und $\vec{K}$ - Matrizen aufzulösen:

$$j_{\mu}(p', \lambda', p, \lambda) = f_{\lambda}^+(p') j_{\mu}(p', p) f_{\lambda}(p) , \tag{4.29}$$

wobei $j_{\mu}(p', p)$ die reduzierte 3×3 dimensionale Strommatrix ist. In der reduzierten Form wird der magnetische Formfaktor in Gl. (4.18) aus der magnetischen Wechselwirkungsenergie bestimmt.

Die Ergebnisse für die Stromkomponenten lassen sich nicht einheitlich vierdimensional schreiben, sondern müssen getrennt für Raum- und Zeitkomponenten angegeben werden. Die Raumkomponenten sind:

$$\begin{aligned} \vec{j}(p', p) = & Ze (\vec{p}' + \vec{p}) + 2 i \mu \vec{S} \times \vec{q} \\ & - i Ze ((1+g_a) \frac{m}{Z m_p} - 1) \frac{1}{m^2 + E^2} \vec{S} \vec{p}' \vec{S} \times \vec{q} \vec{S} \vec{p} . \end{aligned} \quad (4.30)$$

Die Zeitkomponente lautet:

$$\begin{aligned} j_0(p', p) = & Ze \, 2E - Ze \frac{E}{m^2 + E^2} ((1+g_a) \frac{m}{Z m_p} - 1) \times \\ & \times (\vec{K}^+ \vec{q} \vec{K} \vec{p} - \vec{K}^+ \vec{p}' \vec{K} \vec{q}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Z ist die Ladung des Teilchens, m seine Masse, $(E, \vec{p})$ der Viererimpuls des einlaufenden Zustandes, $(E, \vec{p}')$ der Viererimpuls des auslaufenden Zustandes, $\mu = \frac{e}{2 m_p} g$ ist das magnetische Moment des zu beschreibenden Teilchens gemessen in Nuklearmagnetonen $(\frac{e}{2 m_p})$, m_p ist die Protonenmasse, g der g -Faktor und g_a der anomale g Faktor des Teilchens. $q_\mu = (0, \vec{p}' - \vec{p})$ ist der Impulsübertrag während der Streuung. Wir bemerken die Symmetrieeigenschaften der Ströme

$$j_0(-\vec{p}', -\vec{p}) = j_0(\vec{p}', \vec{p}) \quad (4.32)$$

$$\vec{j}(-\vec{p}', -\vec{p}) = - \vec{j}(\vec{p}', \vec{p}) \quad (4.33)$$

Bei Umkehrung des Vorzeichens der Impulse verhält sich der Viererstrom wie ein Vierervektor und besitzt somit die richtige Parität. Dieses Ergebnis ist nicht trivial, weil die Ausgangsgleichung der Hurley Theorie nicht paritätsinvariant ist und ein besonderes Verfahren angewendet werden mußte, um dynamische Größen mit den richtigen Symmetrien zu bilden. Der Erhaltungssatz der Ströme ist im Impulsraum leicht zu prüfen:

$$q_{\mu} j_{\mu} (p', p) = 0 \quad (4.34)$$

4.6 Definition der Dichtematrix

$$\rho(p) = \sum_{\lambda} |p, \lambda\rangle \langle p, \lambda| w(\lambda) \quad (4.35)$$

$$\rho(p)^{lk} = \sum_{\lambda = \pm 1, 0} w(\lambda) f_l(p, \lambda) f_k^*(p, \lambda) \quad (4.36)$$

$w(\lambda)$ ist die Wahrscheinlichkeit des reinen Spin-zustandes mit Helizität λ .

5. Streutheorie

In der Streuung von Schwerionen lassen sich mit einiger Vorsicht die Techniken der Quantenfeldtheorie anwenden. Der Vorteil der S-Matrix Methode in der QFT ist die relativistische Invarianz, und die zweite Quantelung, die den Teilchencharakter in der Wechselwirkung unterstreicht. Eine geschlossene Lösung des Streuproblems ist allerdings nicht möglich. Man handelt sich somit die Mühe ein, schrittweise die höheren Ordnungen der Störungsrechnung auszuwerten.

Wir untersuchen die elektromagnetische Wechselwirkung der Kerne. Dabei wird die Einschußenergie unterhalb der Coulombbarriere gewählt, so daß sich die Kerne im Perihel ihrer Bahn außerhalb des Bereichs der Kernkräfte befinden. Die endliche Ausdehnung der Kerne führt zu einer Änderung des Coulombpotentials im Bereich $r \leq R_1 + R_2$, wobei r die relative Entfernung der Kerne und R_1, R_2 deren Radien sind. Dieser Effekt ist sekundär bezüglich der Änderung des Potentials durch die Kernkräfte bei relativen Entfernungen $r \leq R_1 + R_2 + 2\delta$, wobei δ die Reichweite der Kernkräfte ist.

Die Anregung der Kerne ist definitionsgemäß in der elastischen Streuung nicht enthalten.

Die untersten Energieniveaus der Li^6 und N^{14} Kerne sind genügend weit voneinander entfernt ³⁴: ~ 2 MeV, so daß auch experimentell elastische und unelastische Stöße energetisch auflösbar sind. Die Abschirmung des elektromagnetischen Kernpotentials durch die Elektronenhülle kann durch einen "elektronischen" Formfaktor beschrieben werden.⁴⁰ Wir vernachlässigen jedoch diesen Effekt.

5.1 Der Streuoperator

Wir nehmen an, daß der Streuoperator durch die Dyson-Formel gegeben ist. Diese folgt aus der Störungstheorie und gibt eine geschlossene Darstellung des Streuoperators als Exponentialfunktion der Wechselwirkungsenergie:²⁶

$$S = T \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} N L_w(x) d^4x \right] \quad (5.1)$$

$L_w(x)$ ist die Wechselwirkungsenergie in zweiter Quantelung, N der Normalordnungsoperator und T der Zeitordnungsoperator.

Die Streuamplitude $\mathbb{M}$ für den Übergang aus dem Anfangszustand in den Endzustand $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ ist gleich dem Mittelwert:

$$\mathbb{M}_{if} = \langle f | (1-S) | i \rangle \quad (5.2)$$

Das absolute Quadrat der Streuamplitude ist die Streuintensität. Der differentielle Streuquerschnitt ist die Streuintensität geteilt durch den Teilchenfluß. Im Schwerpunktsystem gilt^{29,30}

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16 E^2} |\mathbb{M}_{if}|^2 = \frac{1}{4s} |\mathbb{M}_{if}|^2, \quad (5.3)$$

E ist die Schwerpunktsenergie der Teilchen.

Den Streuquerschnitt im Laborsystem berechnet man im nichtrelativistischen Fall aus dem Streuquerschnitt im Schwerpunktsystem

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Lab}} (\theta) = 4 \cos \theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{c.m.}} (2\theta). \quad (5.4)$$

Bei elastischer Streuung ist der Streuwinkel im Laborsystem die Hälfte des Winkels im Schwerpunktsystem. Relativistisch ist die Umwandlung gegeben durch

$$\text{tg } \theta_{\text{Lab}} = \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{1+E/m}} \text{tg} \left(\frac{\theta_{\text{c.m.}}}{2} \right) \quad (5.5)$$

$$\sigma_{\text{Lab}} (\theta_{\text{Lab}}) = \sigma_{\text{c.m.}} (\theta_{\text{c.m.}}) \frac{\sin \theta_{\text{c.m.}}}{\sin \theta_{\text{Lab}}} \frac{d \theta_{\text{c.m.}}}{d \theta_{\text{Lab}}}.$$

Eine geschlossene Auswertung der Amplituden (5.2) ist nicht möglich. Der Streuoperator wird nach Potenzen der Wechselwirkungsenergie entwickelt:

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} S_i \quad (5.6)$$

S_0 beschreibt keine Wechselwirkung der Teilchen, und S_1 enthält die Streuung eines Teilchens an einem elektromagnetischen Potential. Diese Streuung wurde schon in der Fachliteratur behandelt.^{44,45}

Wir untersuchen den S_2 Term für eine Wechselwirkung

$$L_w(x) = \hat{j}_\mu(x) A_\mu(x) + \xi \hat{j}_{\mu\nu}(x) A_\mu(x) A_\nu(x)$$

mit

$$\xi = \begin{cases} 0 & \text{für die Hurley Theorie} \\ 1 & \text{für die Proca Theorie} \end{cases} .$$

Im folgenden wird ξ nicht mehr explizit angeführt.

Höhere Ordnungen der Wechselwirkung S_i , $i > 2$, müssen im allgemeinen renormiert werden. Für die Polarisationseffekte in Streuprozessen können die höheren Ordnungen der Wechselwirkung sehr bedeutend sein, wie aus den Beispielen der Elektronenstreuung³⁵ hervorgeht.

5.2. Born'sche Näherung

Der Term S_2 gibt eine Zweikörperstreuung durch Austausch eines einzigen Photons, oder, wie in dem Proca-Modell, auch durch Austausch von zwei Photonen, die gleichzeitig von einem Teilchen ausgestrahlt und gleichzeitig von dem Streupartner absorbiert werden (Mövengraphen).

$$S_2 = - \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y T \{ N(\hat{j}_\mu(x) A_\mu(x) + \hat{j}_{\mu\nu}(x) A_\mu(x) A_\nu(x)) + N(\hat{j}_\mu(y) A_\mu(y) + \hat{j}_{\mu\nu}(y) A_\mu(y) A_\nu(y)) \} \quad (5.7)$$

Der Integrand enthält zeit- und normalgeordnete Produkte von Feldoperatoren in der zweiten Quantelung. Diese werden nach dem zweiten Wick'schen Satz der Quantenfeldtheorie²⁷ aufgelöst. Ein wichtiges Ergebnis des Wick'schen Satzes ist, daß das zeitgeordnete Produkt einer ungeraden Anzahl von normalgeordneten Feldoperatoren Null ist. Somit bleiben von (5.7) nur die Terme übrig, die die elektromagnetischen Potentiale zur zweiten und vierten Potenz enthalten.

$$S_2 = - \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y T \{ N(\hat{j}_\mu(x) A_\mu(x)) N(\hat{j}_\nu(y) A_\nu(y)) + N(\hat{j}_{\mu\nu}(x) A_\mu(x) A_\nu(x)) N(\hat{j}_{\lambda\sigma}(y) A_\lambda(y) A_\sigma(y)) \}. \quad (5.8)$$

Von den anfallenden Termen, nach weiterer Anwendung des Wick'schen Satzes, werden nur jene beibehalten, die einer Zweiteilchenstreuung entsprechen:

$$\begin{aligned}
 S_2 = & - \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y \{ \overline{A_\mu(x)} A_\nu(y) N(\hat{j}_\mu(x) \hat{j}_\nu(y)) \\
 & + (\overline{A_\lambda(x)} A_\epsilon(y) \overline{A_\sigma(x)} A_\rho(y) + \overline{A_\lambda(x)} A_\rho(y) \overline{A_\sigma(x)} A_\epsilon(y)) \\
 & N(\hat{j}_{\lambda\sigma}(x) \hat{j}_{\epsilon\rho}(y)) \} . \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

Die Kontraktion zweier Felder ist ein Vakuum Erwartungswert (Propagator). Für die elektromagnetischen Potentiale gilt ²⁸ :

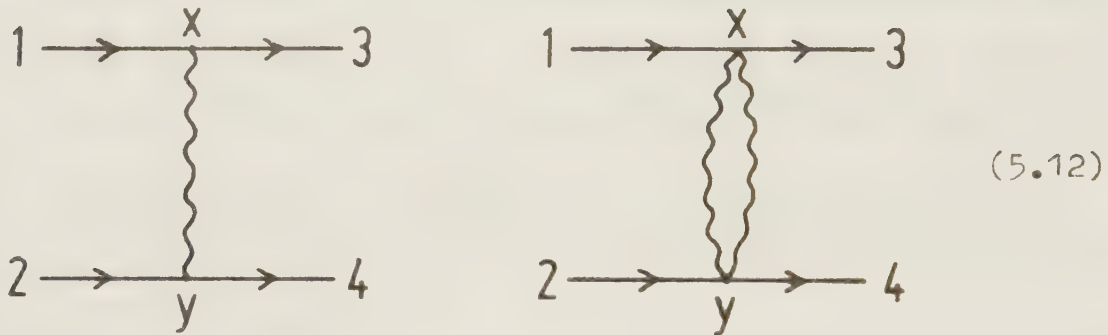
$$i \overline{A_\mu(x)} A_\nu(y) = D_{\mu\nu}(x-y) = i \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle \quad (5.10)$$

Wir erhalten somit für S_2

$$\begin{aligned}
 S_2 = & \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y \{ i D_{\mu\nu}(x-y) N(\hat{j}_\mu(x) \hat{j}_\nu(y)) \\
 & + (D_{\lambda\epsilon}(x-y) D_{\sigma\rho}(x-y) + D_{\lambda\rho}(x-y) D_{\sigma\epsilon}(x-y)) \\
 & N(\hat{j}_{\lambda\sigma}(x) \hat{j}_{\epsilon\rho}(y)) \} . \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

Die beiden Amplituden aus (5.11) sind 90 Grad phasenverschoben, somit gibt es keine Interferenz zwischen dem Einphotonen- und dem Zweiphotonenaustauschprozeß.

Mit Feynmandiagrammen läßt sich der Inhalt des S_2 Terms bildlich darstellen:



Der Mittelwert des Streuoperators (5.11) wird zwischen den Anfangszuständen $|1,2\rangle$ und den Endzuständen $|3,4\rangle$ berechnet. Die Anfangs- und Endzustände werden durch die Quantenzahlen der ein- und auslaufenden Teilchen $p_1, p_2, p_3, p_4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ bestimmt. Bei elastischer Streuung im Schwerpunktsystem sind die Zeitkomponenten der Viererimpulse gleich der Energie im Schwerpunktsystem: $p_1^0 = p_2^0 = p_3^0 = p_4^0 = E$.

Dem Bosonencharakter der Spin 1 Teilchen tragen wir Rechnung durch Symmetrisierung der Zustände (für Fermi-Teilchen wird antisymmetrisiert):

$$|1,2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|1,2\rangle + |2,1\rangle) \quad (5.13)$$

$$|3,4\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|3,4\rangle + |4,3\rangle) . \quad (5.14)$$

Wir setzen die Stromoperatoren in ihrer Darstellung in der zweiten Quantelung ein:

$$\langle 3,4 | S_2 | 1,2 \rangle = \frac{1}{8} \int d^4x \int d^4y$$

$$\left\{ i \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q D_{\mu\nu}(q) e^{-iq(x-y)} \right\} (\langle 3,4 | + \langle 4,3 |)$$

$$\left(N \frac{1}{(2\pi)^8} \sum_{\lambda\lambda'} \int d^4p d^4p' j_{\mu}^{\lambda\lambda'}(p',p) a^+(p',\lambda') a(p,\lambda) \right.$$

$$\left. \frac{1}{(2\pi)^8} \sum_{\lambda''\lambda'''} \int d^4p'' d^4p''' j_{\nu}^{\lambda''\lambda'''}(p''',p'') a^+(p''',\lambda''') a(p'',\lambda'') \right.$$

$$e^{-i(p'-p)x} e^{-i(p'''-p'')y} (|1,2\rangle + |2,1\rangle) \quad (5.15)$$

$$+ \left(\frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4k D_{\lambda\epsilon}(k) e^{-ik(x-y)} \int d^4k' D_{\sigma\rho}(k') e^{-ik'(x-y)} \right.$$

$$+ \left. \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4k D_{\lambda\rho}(k) e^{-ik(x-y)} \int d^4k' D_{\sigma\epsilon}(k') e^{-ik'(x-y)} \right)$$

$$(\langle 3,4 | + \langle 4,3 |) N \frac{1}{(2\pi)^8} \sum_{\lambda\lambda'} \int d^4p d^4p' j_{\lambda\sigma}^{\lambda\lambda'}(p',p)$$

$$a^+(\lambda',p') a(\lambda,p) \frac{1}{(2\pi)^8} \sum_{\lambda''\lambda'''} \int d^4p'' d^4p''' j_{\epsilon\rho}^{\lambda'''\lambda''}(p''',p'')$$

$$a^+(\lambda''',p''') a(\lambda'',p'') e^{-i(p'-p)x} e^{-i(p'''-p'')y} (|1,2\rangle + |2,1\rangle) .$$

Für Bose Teilchen bedeutet die Normalordnung von Operatoren in der zweiten Quantelung Vertauschung von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a^+ und a , so daß alle Teilchenvernichtungsoperatoren rechts stehen. Diese Regel ist eine Folge des Kommutators (3.53):

$$\begin{aligned} N(a^+(p', \lambda') a(p, \lambda) a^+(p'', \lambda'') a(p'', \lambda'')) &= \\ &= a^+(p', \lambda') a^+(\lambda''', p''') a(p, \lambda) a(p'', \lambda'') \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$a(\lambda, p) |p', \lambda' \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(p-p') |0 \rangle \quad (5.17)$$

$$\langle p', \lambda' | a^+(\lambda, p) = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(p - p') \langle 0 | \quad (5.18)$$

In Gl. (5.15) werden die Mittelwerte über die Teilchenoperatoren gebildet. Dabei entstehen nach (5.17) und (5.18) Deltafunktionen für die Impulse und Kroneckersymbole für Helizitäten, die zur Reduktion der Integrale über die Zwischenimpulse p, p', p'' und p''' sowie der Summen über die Helizitäten $\lambda, \lambda', \lambda'', \lambda'''$ führen. Die Auswertung der Integrale über die Raumpunkte x und y führt zu Erhaltungssätzen der Impulse: $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ und zur Bestimmung der Impulsüberträge $q = p_3 - p_1$ für den Direktprozeß im Einphotonenaustausch, und $q = p_4 - p_1$ für den Austauschprozeß. Für den Zweiphotonenaustausch wird der Gesamtimpulsübertrag festgelegt, wobei eine Integration

über einen freien Parameter aussteht: $q = q_1 + q_2 =$
 $= k + (p_3 - p_1 - k)$, $k = -\infty, +\infty$, für den Direkt-
 prozeß und $q = q_1 + q_2 = k + (p_4 - p_1 - k)$, $k = -\infty,$
 $+\infty$ für den Austauschprozeß.

Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{if} = & \langle 3,4 | S_2 | 1,2 \rangle = \frac{1}{4} i \left[D_{\mu\nu}(p_3 - p_1) j_{\mu}^{\lambda_4 \lambda_2}(p_4, p_2) \right. \\ & j_{\nu}^{\lambda_3 \lambda_1}(p_3, p_1) + D_{\mu\nu}(p_4 - p_1) j_{\mu}^{\lambda_3 \lambda_2}(p_3, p_2) j_{\nu}^{\lambda_4 \lambda_1}(p_4, p_1) \left. \right] \\ & + \frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \left[(D_{\lambda\epsilon}(k) D_{\rho\sigma}(p_3 - p_1 - k) + \right. \\ & D_{\lambda\rho}(k) D_{\sigma\epsilon}(p_3 - p_1 - k)) j_{\lambda\sigma}^{\lambda_4 \lambda_2}(p_4, p_2) j_{\epsilon\rho}^{\lambda_3 \lambda_1}(p_3, p_1) + \\ & + (D_{\lambda\epsilon}(k) D_{\rho\sigma}(p_4 - p_1 - k) + D_{\lambda\rho}(k) D_{\sigma\epsilon}(p_4 - p_1 - k)) \\ & \left. j_{\lambda\sigma}^{\lambda_3 \lambda_2}(p_3, p_2) j_{\epsilon\rho}^{\lambda_4 \lambda_1}(p_4, p_1) \right] . \end{aligned} \quad (5.19)$$

Bevor wir in dem Realteil der Amplitude über k integrieren, versuchen wir den Ausdruck zu vereinfachen.

Zu diesem Zweck verwenden wir die explizite Darstellung des Photonenpropagators ²⁸

$$D_{\mu\nu}(q^2) = \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \quad (5.20)$$

Die Kontraktion der Zweiphotonenströme mit dem metrischen Tensor führt zu folgender Gestalt des Realteils der Amplitude:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mathfrak{M}_{if} = & \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \left\{ \frac{1}{(\vec{p}_3 - \vec{p}_1 - \vec{k})^2} \frac{1}{\vec{k}^2} \right. \\ & [j_{00}^{\lambda_4 \lambda_2}(p_4, p_2) j_{00}^{\lambda_3 \lambda_1}(p_3, p_1) + j_{ik}^{\lambda_4 \lambda_2}(p_4, p_2) \cdot \\ & j_{ik}^{\lambda_3 \lambda_1}(p_3, p_1)] + \frac{1}{(\vec{p}_4 - \vec{p}_1 - \vec{k})^2} \frac{1}{\vec{k}^2} [j_{00}^{\lambda_3 \lambda_2}(p_3, p_2) \cdot \\ & j_{00}^{\lambda_4 \lambda_1}(p_4, p_1) + j_{ik}^{\lambda_3 \lambda_2}(p_3, p_2) j_{ik}^{\lambda_4 \lambda_1}(p_4, p_1)] \quad (5.21) \end{aligned}$$

Wir betrachten nun das Impulsintegral. Dieses ist vom Typ

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d^4 k \frac{1}{\vec{k}^2 (\vec{a} - \vec{k})^2} \quad (5.22)$$

Der Integrand ist unabhängig von der vierten Komponente des Impulses k_0 . Wir ersetzen deswegen die unendlichen Integrationsgrenzen durch einen Abschneideparameter ω .

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \rightarrow \int_{-\omega}^{\omega} dk_0 = 2\omega \quad (5.23)$$

Der Abschneideparameter hat die Dimension einer Energie. Der einzige Festpunkt in der Energieskala bei Streuung von gleichen Teilchen ist die Masse der Teilchen. Wir wählen somit die Ruhemasse der Teilchen als typische Energie für den Abschneideparameter: $\omega = m$.

Diese Wahl wird von dem Streuungsquerschnitt der Streuung eines skalaren Teilchens an einem $1/r^2$ Potential bestätigt. Das $1/r^2$ Potential ist der nicht-relativistische Grenzfall des Zweiphotonenaustauschprozesses.

Die räumliche Integration über $\vec{k}$ wird mit Hilfe der Feynman'schen Parameterdarstellung durchgeführt. Für beliebiges $\vec{a}$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3k \frac{1}{\vec{k}^2 (\vec{a} - \vec{k})^2} = \frac{\pi^4}{2} \frac{1}{\sqrt{\vec{a}^2}}. \quad (5.24)$$

Insgesamt erhalten wir:

$$I = \frac{m \pi^4}{|\vec{a}|} \quad (5.25)$$

Der Realteil der Amplitude lautet:

$$\text{Re } \mathfrak{M}_{if} = \frac{m}{16} \left\{ \frac{1}{|\vec{p}_3 - \vec{p}_1|} [j_{00}^{\lambda_4 \lambda_2} (4, 2) j_{00}^{\lambda_3 \lambda_1} (3, 1) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + j_{ik}^{\lambda_4 \lambda_2(4,2)} j_{ik}^{\lambda_3 \lambda_1(3,1)}] + \frac{1}{|\vec{p}_4 - \vec{p}_1|} [j_{oo}^{\lambda_3 \lambda_2(3,2)} * \\
& j_{oo}^{\lambda_4 \lambda_1(4,1)} + j_{ik}^{\lambda_3 \lambda_2(3,2)} j_{ik}^{\lambda_4 \lambda_1(4,1)}] \} \quad (5.26)
\end{aligned}$$

Der Imaginärteil der Amplitude ist

$$\begin{aligned}
\text{Im } \mathfrak{M}_{if} &= \frac{1}{4} (D_{\mu\nu}(p_3 - p_1) j_{\mu}^{\lambda_4 \lambda_2(4,2)} j_{\nu}^{\lambda_3 \lambda_1(3,1)} + \\
& + D_{\mu\nu}(p_4 - p_1) j_{\mu}^{\lambda_3 \lambda_2(3,2)} j_{\nu}^{\lambda_4 \lambda_1(4,1)}) . \quad (5.27)
\end{aligned}$$

Mit der Formel (5.20) für den Photonenpropagator folgt

$$\begin{aligned}
\text{Im } \mathfrak{M}_{if} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{t} j_{\mu}^{\lambda_4 \lambda_2(4,2)} j_{\mu}^{\lambda_3 \lambda_1(3,1)} + \frac{1}{u} j_{\mu}^{\lambda_3 \lambda_2(3,2)} * \right. \\
& \left. j_{\mu}^{\lambda_4 \lambda_1(4,1)} \right) . \quad (5.28)
\end{aligned}$$

Über die Spinzustände muß inkohärent summiert und durch das Gewicht der Zustände geteilt werden.

$$|\mathfrak{M}_{if}|^2 = \frac{1}{(2s+1)^2} \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4} |\mathfrak{M}_{if}|^2 . \quad (5.29)$$

In unserem Fall ist $(2s+1)^2 = 9$. Bei der Berechnung des absoluten Quadrates werden die einzelnen Glieder

umgeordnet, so daß sich Spuren von Produkten der Strom- und Dichtematrizen ergeben.

$$(\text{Im } \mathfrak{M}_{if})^2 = \frac{1}{9} \left(\frac{A}{t^2} + \frac{B}{u^2} + \cos \left(\eta \log \left(\text{tg } \frac{\theta}{2} \right)^2 \right) \frac{C+D}{tu} \right)$$

$$t = 4 p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$u = 4 p^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

(5.30)

$$\eta = \frac{1}{2} Z^2 e^2 \frac{m}{p} .$$

Die freien Lösungen (3.8) und (4.10) der relativistischen Wellengleichungen werden mit der Phase der Coulombwellen erweitert, die aus der Lösung der Schrödingergleichung im Coulombfeld folgen. Der Effekt ist das Auftreten von $\cos \left(\eta \log \left(\text{tg } \frac{\theta}{2} \right)^2 \right)$ im Interferenzterm von (5.30). Wir erhalten eine DBWA Korrektur der Wechselwirkung.

$$A = \text{Sp} (j_{\mu}(3,1) \rho(1) j_{\nu}^{+}(3,1) \rho(3))_*$$

$$\text{Sp} (j_{\mu}(4,2) \rho(2) j_{\nu}^{+}(4,2) \rho(4)) \quad (5.31)$$

$$B = \text{Sp} (j_{\mu}(4,1) \rho(1) j_{\nu}^{+}(4,1) \rho(4))_*$$

$$\text{Sp} (j_{\nu}(3,2) \rho(2) j_{\nu}^{+}(3,2) \rho(3)) \quad (5.32)$$

$$C = \text{Sp} (j_{\mu}(3,1) \rho(1) j_{\nu}^{+}(4,1) \rho(4) j_{\mu}(4,2) \rho(2) * \\ j_{\nu}^{+}(3,2) \rho(3)) \quad (5.33)$$

$$D = \text{Sp} (j_{\mu}(4,1) \rho(1) j_{\nu}^{+}(3,1) \rho(3) j_{\mu}(3,2) \rho(2) * \\ j_{\nu}^{+}(4,2) \rho(4)) \quad (5.34)$$

B und D werden aus den Amplituden A und C durch Vertauschen der Teilchenzustände 3 und 4 abgeleitet.

$$(\text{Re } \mathbb{M}_{if})^2 = \frac{1}{9} \frac{m^2}{16} \left(\frac{A_2}{t} + \frac{B_2}{u} + \frac{C_2 + D_2}{\sqrt{|t u|}} \right) \quad (5.35)$$

$$A_2 = (Ze)^8 \text{Sp} \rho(1) \rho(3) \text{Sp} \rho(2) \rho(4) + \\ + (Ze)^4 \text{Sp} \rho(1) j_{1m}^{+}(3,1) \rho(3) \text{Sp} \rho(2) j_{1m}^{+}(4,2) \rho(4) + \\ + (Ze)^4 \text{Sp} j_{1m}(3,1) \rho(1) \rho(3) \text{Sp} j_{1m}(4,2) \rho(2) \rho(4) + \\ + \text{Sp} j_{kl}(3,1) \rho(1) j_{mn}^{+}(3,1) \rho(3) \text{Sp} j_{kl}(4,2) \rho(2) * \\ j_{mn}^{+}(4,2) \rho(4) \quad (5.36)$$

$$B_2 = (Ze)^8 \text{Sp} \rho(1) \rho(4) \text{Sp} \rho(2) \rho(3) + \\ + (Ze)^4 \text{Sp} \rho(1) j_{1m}^{+}(4,1) \rho(3) \text{Sp} \rho(2) j_{1m}^{+}(3,2) \rho(3) + \\ + (Ze)^4 \text{Sp} j_{1m}(4,1) \rho(1) \rho(3) \text{Sp} j_{1m}^{+}(3,2) \rho(2) \rho(3) + \\ + \text{Sp} j_{kl}(4,1) \rho(1) j_{mn}^{+}(4,1) \rho(4) \text{Sp} j_{kl}(3,2) \rho(2) j_{mn}^{+}(3,2) \rho(3) \\ (5.37)$$

$$\begin{aligned}
C_2 = & (Ze)^8 \text{Sp } \rho(1) \rho(4) \rho(2) \rho(3) + \\
& + (Ze)^4 \text{Sp } \rho(1) j_{1m}^+(4,1) \rho(4) \rho(2) j_{1m}^+(3,2) \rho(3) + \\
& + (Ze)^4 \text{Sp } j_{1m}(3,1) \rho(1) \rho(4) j_{1m}(4,2) \rho(2) \rho(3) + \\
& + \text{Sp } j_{kl}(3,1) \rho(1) j_{mn}(4,1) \rho(4) j_{kl}(4,2) \rho(2) j_{mn}(3,2) \rho(3)
\end{aligned}
\tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}
D_2 = & (Ze)^8 \text{Sp } \rho(1) \rho(3) \rho(2) \rho(4) + \\
& + (Ze)^4 \text{Sp } \rho(1) j_{1m}^+(3,1) \rho(3) \rho(2) j_{1m}^+(4,2) \rho(4) + \\
& + (Ze)^4 \text{Sp } j_{1m}(4,1) \rho(1) \rho(3) j_{1m}(3,2) \rho(2) \rho(4) + \\
& + \text{Sp } j_{kl}(4,1) \rho(1) j_{mn}(3,1) \rho(3) j_{kl}(3,2) \rho(2) j_{mn}(4,2) \rho(4)
\end{aligned}
\tag{5.39}$$

Der differentielle Streuquerschnitt im Schwerpunktsystem ist laut (5.3) :

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} = & \frac{1}{4s} \frac{1}{9} \left\{ \frac{A}{t^2} + \frac{B}{u^2} + \cos(\eta \log(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}))^2 \frac{C+D}{tu} + \right. \\
& + \xi \frac{m^2}{16} \left[\frac{A_2}{t} + \frac{B_2}{u} + \frac{C_2 + D_2}{\sqrt{tu}} \right] \Big\}
\end{aligned}
\tag{5.40}$$

$$\xi = \begin{cases} 0 & \text{in der Hurley Theorie} \\ 1 & \text{in der Proca Theorie.} \end{cases}$$

5.3. Übergangsamplituden für die elastische Streuung von Teilchen mit verschiedenen Quantenzahlen

Beim Stoß verschiedener Teilchen a und b lautet der Wechselwirkungsterm der Lagrangefunktion:

$$L_w(t) = \int d^3x N(j_\mu^a(x) A_\mu(x) + j_\nu^b(x) A_\nu(x)) \quad (5.41)$$

j_μ^a und j_μ^b bezeichnen die elektromagnetischen Ströme der Stoßpartner. Die Symmetrisierung (5.13) entfällt, da die Felder der Ein- und Ausgangskanäle kommutieren. Die Amplitude läßt sich sofort aus Gl. (5.19) ablesen:

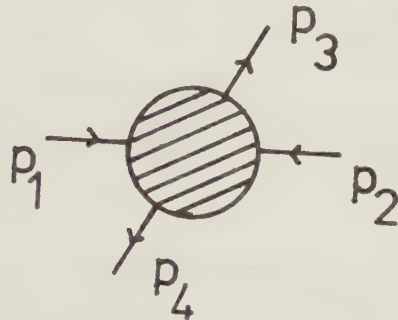
$$\langle 3,4 | S_2 | 1,2 \rangle = D_{\mu\nu}(p_3-p_1) j_\mu^{\lambda_4 \lambda_2^b}(p_4, p_2) j_\nu^{\lambda_3 \lambda_1^a}(p_3, p_1): \quad (5.42)$$

Der Streuquerschnitt ist im wesentlichen im Direktterm des Einphotonenstreuquerschnitts enthalten.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16 E^2} \frac{1}{9} \frac{1}{|\vec{p}_3 - \vec{p}_1|^2} \text{Sp } j_\mu^a(3,1) \rho^a(1) j_\nu^{+a}(3,1) \rho^a(3) \\ \text{Sp } j_\mu^b(4,2) \rho^b(2) j_\nu^{+b}(4,2) \rho^b(4) . \quad (5.43)$$

5.4 Kinematik

Die Kinematik wird durch die Richtung und Größe der Viererimpulse p_1, p_2, p_3, p_4 der beiden streuenden Teilchen vor und nach dem Stoß bestimmt.

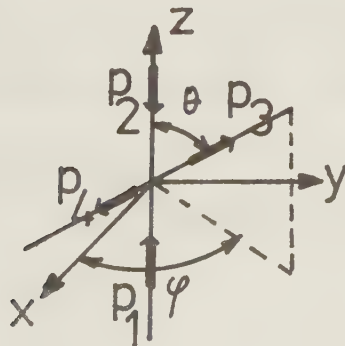


Wir wählen die Einschußrichtung gleich der z-Achse:

$$\vec{e}_z = \frac{\vec{p}_1}{|\vec{p}_1|} = - \frac{\vec{p}_2}{|\vec{p}_2|} .$$

Allgemein wird die Richtung der gestreuten Teilchen durch den Streuwinkel θ und den Azimutwinkel φ angegeben. Für $\varphi = 0$ bildet die y-Achse die Streunormale

$$\vec{e}_y = \frac{\vec{p}_3 \times \vec{p}_1}{|\vec{p}_3 \times \vec{p}_1|} .$$



6. Nichtrelativistischer Grenzwert der Streuquerschnitte und Zweikörperpotentiale

6.1. Mott-Streuquerschnitte

Im nichtrelativistischen Grenzfall gehen die Streuquerschnitte des Proca und Hurley-Modells, die proportional zu Z^4 sind, in den Mott Streuquerschnitt für Spin 1 Teilchen über. Der Z^8 Term in der Proca Theorie hat kein klassisches Analogon und muß im NR-Limes weglassen werden.

Im NR Grenzwert verschwinden die Raumkomponenten des Viererimpulses, und die Energie ist gleich der Ruhemasse: $p = 0$, $E = m$. Die Einphotonenströme (3.41), (3.42), (4.30) und (4.31) vereinfachen sich zu

$$j_0(p', p) = 2 m Z e \quad (6.1)$$

$$\vec{j}(p', p) = 0 \quad ,$$

so daß die Ströme aus den Spuren der Streuamplituden herausfallen. Wir erhalten eine Verallgemeinerung des Mott-Streuquerschnittes für polarisierte Spin 1 Teilchen in der Helizitätsdarstellung:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16E^2} \frac{1}{16p^4} \frac{1}{9} \left(\frac{A}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{B}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{C + D}{\cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right), \quad (6.2)$$

wobei die Amplituden Grenzfälle der Formeln (5.30), (5.31), (5.32) und (5.33) sind:

$$A = (2m Ze)^4 \text{Tr } \rho(1)\rho(3) \text{Tr } \rho(2)\rho(4) \quad (6.3)$$

$$B = (2m Ze)^4 \text{Tr } \rho(1)\rho(4) \text{Tr } \rho(2)\rho(3) \quad (6.4)$$

$$C = (2m Ze)^4 \text{Tr } \rho(1)\rho(4) \rho(2)\rho(3) \quad (6.5)$$

$$D = (2m Ze)^4 \text{Tr } \rho(1)\rho(3)\rho(2)\rho(4). \quad (6.6)$$

Wenn alle asymptotischen Zustände unpolarisiert sind, d.h. die Dichtematrizen gleich der Einheitsmatrix sind, erhalten wir an Stelle von (6.2) die wohlbekannte Form des Mott-Streuquerschnittes:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2m Ze)^4}{(16)^2 E^2 p^4} \left(\frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{2}{3} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right) \quad (6.7)$$

6.2. Zweikörperpotentiale ³¹

Wir betrachten für beide Modelle eine Näherung der Ordnung $1/c^2$ der Einphotonenamplitude (5.30). Die Amplitude kann als Faltung eines Zweikörperpotentials mit den asymptotischen Einteilchenzuständen definiert werden:

$$\mathcal{M}_{if} = f^+(4)f^+(3) U(4,3,2,1) f(2) f(1) \quad (6.8)$$

Komponentenweise:

$$\mathcal{M}_{if} = U^{kl,mn}(4,3,2,1) f_k^*(3) f_l(1) f_m^*(4) f_n(2) \quad (6.9)$$

$$k,l,m,n = 1,2,3 \text{ .}$$

Die Zweiteilchenströme verhalten sich bei Raumspiegelung wie Vierervektoren:

$$\begin{aligned} j_0(4,2) &= j_0(3,1) \\ \vec{j}(4,2) &= -\vec{j}(3,1) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Im Impulsraum ist das Potential eine Funktion des einlaufenden Impulses p und des Impulsübertrags q :

$$\begin{aligned} U^{k,l,m,n}(q,p) &= \frac{4\pi}{q^2} (j_0^{kl}(3,1) j_0^{mn}(3,1) \\ &\quad + j_i^{kl}(3,1) j_i^{mn}(3,1)) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Es werden kubische Terme in q und p in den Strömen vernachlässigt. Nach Erhalt des Potentials im Impulsraum wird über den Impulsübertrag $\vec{q}$ in den Ortsraum transformiert. Dabei werden folgende Integralformeln verwendet ^{28,31}

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iqr} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \delta(r)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iqr} \frac{4\pi}{q^2} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{1}{r}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iqr} \frac{4\pi \vec{q}}{q^2} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{i \vec{r}}{r^3} \quad (6.12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} 4\pi e^{iqr} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{q})(\vec{b} \cdot \vec{q})}{q^4} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{1}{2r} (\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{r} \vec{b} \cdot \vec{r}}{r^2})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} 4\pi e^{iqr} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{q})(\vec{b} \cdot \vec{q})}{q^2} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{1}{r^3} (\vec{a} \cdot \vec{b} -$$

$$- 3 \frac{(\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{b} \cdot \vec{r})}{r^2}) + \frac{4\pi}{3} \vec{a} \cdot \vec{b} \delta(r) .$$

Um eine synthetische Darstellung der Potentiale zu bekommen, parametrisieren wir die Strommatrizen, wobei die Parameter α, β in beiden Theorien verschiedene Werte annehmen:

(i) Proca

$$j_0(p', p) = 2 Ze E + \alpha (\vec{K}^+ \vec{q} \vec{K} \vec{p} - \vec{K}^+ \vec{p}' \vec{K} \vec{q}) + \beta (\vec{K}^+ \vec{p}' \vec{K} \vec{p}' + \vec{K} \vec{p} \vec{K} \vec{p}) \quad (6.13)$$

$$\vec{j}(p', p) \approx Ze (\vec{p}' + \vec{p}) + 2 im\mu \vec{S} \times \vec{q} + O\left(\frac{v^3}{c^3}\right) \quad (6.14)$$

mit

$$\alpha = -\frac{e}{E} \left(g \frac{m}{m_p} - Z \right), \quad \beta = \frac{2 Ze}{E}, \quad \mu = \frac{ge}{2m_p} \quad (6.15)$$

(ii) Hurley

$$j_0(p', p) = 2 Ze E + \alpha (\vec{K}^+ \vec{q} \vec{K} \vec{p} - \vec{K}^+ \vec{p}' \vec{K} \vec{q}) \quad (6.16)$$

$$\vec{j}(\vec{p}', \vec{p}) = Ze (\vec{p}' + \vec{p}) + 2 im\mu \vec{S} \times \vec{q} + O\left(\frac{v^3}{c^3}\right) \quad (6.17)$$

mit

$$\alpha = -e \frac{E}{m^2 + E^2} \left(g \frac{m}{m_p} - Z \right), \quad \beta = 0 \quad (6.18)$$

Das Zweikörperpotential im Ortsraum (in der $1/c^2$ Näherung) hat folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
 U(p, r, 1, 2) = & \frac{1}{r} \left[(Ze)^2 + 2\left(\frac{Zep}{m}\right)^2 + \frac{ZeE\beta}{m^2} (\vec{K}_1^+ \vec{p} \vec{K}_1 \vec{p} + \right. \\
 & + \left. \vec{K}_2^+ \vec{p} \vec{K}_2 \vec{p}) \right] + \frac{1}{r^3} \left\{ + \frac{Ze\mu}{m} (\vec{S}_1 + \vec{S}_2) \vec{L} - \mu^2 \vec{S}_1 \vec{S}_2 + \right. \\
 & + \frac{(\beta - \alpha)}{m^2} Ze E + i (Ze)^2 \frac{\vec{p} \vec{r}}{m^2} + i \frac{ZeE}{2m^2} [(\alpha + \beta)(\vec{K}_1^+ \vec{r} \vec{K}_1 \vec{p} + \\
 & + \vec{K}_2^+ \vec{r} \vec{K}_2 \vec{p}) - (\beta - \alpha)(\vec{K}_1^+ \vec{p} \vec{K}_1 \vec{r} + \vec{K}_2^+ \vec{p} \vec{K}_2 \vec{r})] + \\
 & + 3 \mu^2 \frac{(\vec{S}_1 \times \vec{r})(\vec{S}_2 \times \vec{r})}{r^2} + 3 ZeE \frac{(\alpha - \beta)}{2m^2} \left(\frac{\vec{K}_1^+ \vec{r} \vec{K}_1 \vec{r}}{r^2} + \right. \\
 & + \left. \frac{\vec{K}_2^+ \vec{r} \vec{K}_2 \vec{r}}{r^2} \right) \left. \right\} + \delta(r) \left(\frac{2\pi}{3m^2} (\beta - \alpha) + \frac{Z^2 e^2 \pi}{m^2} - \right. \\
 & - \left. \frac{\pi \mu^2}{3m^2} \vec{S}_1 \vec{S}_2 \right) \quad (6.19)
 \end{aligned}$$

r ist die relative Entfernung der Kerne $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$.

Die wichtigsten Terme des Potentials (6.19) sind gut bekannt.

i. E.Monopol-e.Monopol Wechselwirkung

Der erste Term $(Ze)^2/r$ ist das Coulombpotential für

die Wechselwirkung zweier punktförmiger, unabgeschirmter Teilchen mit der Ladung Ze . Die restlichen Terme in der Klammer (proportional zu $1/r$) sind relativistische Korrekturen zu dem Coulombpotential, die auf eine Veränderung der Masse mit der Geschwindigkeit zurückzuführen sind. Der Term $\vec{K}_1 \vec{p} \vec{K}_1 \vec{p} + \vec{K}_2 \vec{p} \vec{K}_2 \vec{p}$ kommt nur in der Proca Theorie vor und folgt aus der Nebenbedingung $p_\mu \epsilon_\mu = 0$.

ii. E.Monopol-magnetischer Dipol Wechselwirkung
(Spin-Bahn).

$-(1/r^3) Ze_\mu / m (\vec{S}_1 + \vec{S}_2) \vec{L}$ ist das Spin-Bahn Potential. Es nimmt mit fallender Ladung des Kernes ab. Dieser Term ist in der Form $\vec{S} \cdot \vec{L}$ bei Streuung von Teilchen mit Spin an spinlosen Kernen vorhanden und führt zu einer Polarisation.⁴²

iii. M.Dipol-m.Dipol Wechselwirkung (Spin-Spin)

$-(\mu^2/r^3) \vec{S}_1 \vec{S}_2$ ist der Spin Term, der von der Ladung der Teilchen unabhängig ist und dasselbe r^{-3} Verhalten wie der Spin-Bahn Potential zeigt. Als Tensorpotential trägt es zur Polarisation bei.

iv. E.Monopol-E.Quadrupol Wechselwirkung

Elektrischer Quadrupol ist eine Eigenschaft, die nur die Teilchen mit Spin 1 und größer als 1 besitzen. Die Form der Wechselwirkung ist in Gl. (8.15) angegeben.

Bemerkung: Den Beitrag der Spin-Bahn- und Spin-Spin-Potentiale lassen sich gegeneinander abschätzen, wenn $Z\mu \gg \mu\mu$ oder $Z\mu \ll \mu\mu$ gewählt wird.

7. Polarisation von Spin 1 Teilchen

=====

7.1. Vektor und Tensorpolarisation

Wegen den drei Einstellmöglichkeiten des Spin 1 sind die Dichtematrizen 3×3 dimensional. Die Dichtematrix wird im Raum der 3×3 Matrizen mit der Basis (I, S_i, S_{ij}) entwickelt.³² S_i sind die drei Spinmatrizen und S_{ij} die fünf unabhängigen Komponenten des Spintensors.

$$\rho = \frac{1}{3} [\text{Sp}(\rho)I + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^3 P_i S_i + \frac{1}{3} \sum_{k,l=1}^3 P_{kl} S_{kl}] \quad (7.1)$$

Die Koeffizienten der Entwicklung P_i und P_{ij} sind die Vektor- und Tensorpolarisation.

$$P_i = \text{Sp} (\rho S_i) \quad (7.2)$$

und

$$P_{ij} = \text{Sp} (\rho S_{ij}) \quad (7.3)$$

Bei der Auswertung der Spuren werden folgende Formeln verwendet:

$$\text{Sp} (S_i) = \text{Sp} (S_{ij}) = 0 \quad (7.4)$$

$$\text{Sp} (S_i S_{kl}) = 0 \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \text{Sp}(S_{kl} S_{mn}) = & -3 \delta_{kl} \delta_{mn} + \frac{9}{2} \delta_{kn} \delta_{lm} + \\ & + \frac{9}{2} \delta_{ln} \delta_{km} \end{aligned} \quad (7.6)$$

In der Helizitätsdarstellung (3.56) und (4.35) wird die Dichtematrix nach den reinen Helizitätszuständen $|\lambda\rangle$ entwickelt.

$$\rho = \sum_{\lambda = \pm 1, 0} w(\lambda) |\lambda\rangle \langle \lambda| \quad (7.7)$$

Über (7.2) und (7.3) ergibt sich eine Beziehung zwischen P_i , P_{ij} und $w(\lambda)$.

$$P_i = \sum_{\lambda = \pm 1, 0} w(\lambda) \langle \lambda | S_i | \lambda \rangle \quad (7.8)$$

$$P_{ij} = \sum_{\lambda = \pm 1, 0} w(\lambda) \langle \lambda | S_{ij} | \lambda \rangle \quad (7.9)$$

Wenn die Polarisation in einem teilcheneigenen Bezugssystem mit $\vec{p} = (0, 0, p_z)$ gemessen wird, gilt im besonderen:

$$P_3 = w(+1) - w(-1) \quad (7.10)$$

$$P_{33} = 1 - 3 w(0) \quad (7.11)$$

Hierbei wurden für $|\lambda\rangle$ die Spinoren (3.15a) angewendet. P_3 mißt die Asymmetrie zwischen der Besetzungswahrscheinlichkeit $\lambda = +1$ und $\lambda = -1$, d.h. die Asymmetrie rechts- und linkszirkular polarisierter Teilchen. P_{33} zeigt die Abweichung des senkrecht zur Flugrichtung polarisierten Spins von der Gleichgewichtsverteilung in einem nichtpolarisiertem Strahl, für den $w(0) = 1/3$ und somit $P_{33} = 0$ gilt.

Die Polarisationswahrscheinlichkeit $w(\lambda)$ eines Endzustandes ist das Verhältnis des Wirkungsquerschnittes, der zu diesem Zustand führt und dem Wirkungsquerschnitt mit unpolarisiertem Endzustand.

$$w(\lambda) = \frac{d\sigma^\lambda}{d\Omega} / \frac{\overline{d\sigma}}{d\Omega} \quad (7.12)$$

In der Bezeichnung $a(b,d)c$ für $a+b \rightarrow c+d$ wird die Polarisation eines Streupartners durch einen Pfeil angezeigt. Für die Reaktion $\vec{a}(b,d)\vec{c}$ bedeutet (7.12) das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte (oder Streuintensitäten) von $\vec{a}(b,d)\vec{c}$ und $\vec{a}(b,d)c$.

7.2 Analysierstärken

Der Wirkungsquerschnitt für $\vec{a}(b,d)c$ läßt sich in folgender Weise darstellen:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{pol}} = \overline{\frac{d\sigma}{d\Omega}} \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^3 A_i P_i + \frac{1}{3} \sum_{i \leq j} A_{ij} P_{ij} \right) \quad (7.13)$$

P_i, P_{ij} ist die Polarisation des einfallenden Teilchens, und A_i, A_{ij} heißt die Analysierstärke der Reaktion.^{32,33} Die Analysierstärken berechnen sich aus dem Gleichungssystem (7.13) mit $\lambda = \pm 1,0$. Eine Erweiterung von (7.13) für die Streuung mit mehr als einen asymptotisch polarisiertem Zustand ist in ³³ gegeben.

8. Quadrupolwechselwirkung =====

Die Wechselwirkungsenergie eines Teilchens mit Quadrupol Q und Spin s in einem äußeren elektrischen Feld ist gleich ⁷ :

$$\Delta L = \frac{Qe}{4s(2s-1)} (S_i S_j + S_j S_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} s^2) \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \quad (8.1)$$

S_i sind die Spinmatrizen zu Spin s . Für Spin 1 gilt

$$\Delta L = \frac{Qe}{6} \left(\frac{3}{2} (S_i S_j + S_j S_i) - 2 \delta_{ij} \right) \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \quad (8.2)$$

Man erkennt in der Klammer den in Anhang 1 definierten Spintensor zweiter Stufe S_{ij} . Mit dem Quadrupoltensor

$$Q_{ij} = \frac{Qe}{6} S_{ij} \quad (8.3)$$

schreibt sich die Energie (8.1) als Produkt des Quadrupoltensors mit dem Gradienten des elektrischen Feldes:

$$\Delta L = Q_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} E_j \quad (8.4)$$

Im relativistischen Fall ist die gesamte Wechselwirkungsenergie mit dem elektromagnetischen Feld durch das Viererprodukt des em.Stromes mit dem em.Potential gegeben:

$$L = j_{\mu} A_{\mu} \quad (8.5)$$

Die Quadrupolwechselwirkung (8.1) muß in dem Term $j_o A_o$ enthalten sein. Bei einer Normierung der Ströme zu 1, $j_o(p,p)=1$, muß $\Delta j_o A_o = Q_{ij} q_i q_j A_o$ sein. Falls die Ströme nicht zu 1 sondern zu $2E$ normiert sind, $j_o(p,p) = 2E$, gilt im Impulsraum

$$\Delta j_o(p',p) A_o = 2e Q_{ij} q_i q_j A_o \quad (8.6)$$

8.1. Kovariante Kopplung des elektrischen Quadrupol- elementes

Kovariant wird das elektrische Quadrupolmoment über einen Tensor vierter Stufe in die Lagrangedichte eingefügt. Zur Veranschaulichung untersuchen wir die Kopplungsschemen in Gl. (3.16) und (4.18).

Die Kopplung $\beta_{\mu\mu} A_{\mu}$ oder $p_{\mu\mu} A_{\mu}$ liefert die elektrische Monopolwechselwirkung und den normalen Beitrag zum magnetischen Dipolmoment. Den anomalen Beitrag zum magnetischen Dipolmoment liefert $I_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x)$. Wenn wir diese Kopplungsschemen verallgemeinern und in Betracht ziehen, daß in der Quadrupolwechselwirkung die Ableitung des em. Feldtensors vorkommen soll, so gibt es mehrere Möglichkeiten:

$$\beta_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} F_{\alpha\beta} T_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (8.7)$$

oder

$$q_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} F_{\alpha\beta} T_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (8.8)$$

$T_{\mu\nu\alpha\beta}$ ist ein Tensor vierter Stufe, antisymmetrisch in α und β . Eine Darstellung von $T_{\mu\nu\alpha\beta}$ für die $(1,0) \oplus (0,1)$ invariante Theorie wurde in⁷ gegeben.

8.2. Empirische Kopplung des e.Quadrupolmomentes

Die Quadrupolwechselwirkung kann nach Gl. (8.6) durch Erweiterung der Nullkomponenten der em.Ströme eingeführt werden. Die j_0 Ströme der Proca Theorie (3.41) und der Hurley Theorie (4.31) sind nun

$$j_0^P(p', p) = Ze \, 2E + 2 \, EQ_{ij} q_i q_j + \frac{2m\mu}{E} (\vec{K}^+ \vec{q} \vec{K} \vec{p} - \vec{K}^+ \vec{p} \vec{K} \vec{q}) - \frac{2 \, Ze}{E} \vec{K}^+ \vec{p}' \vec{K} \vec{p} \quad (8.9)$$

und

$$j_0^H(p', p) = Ze \, 2E + 2 \, E \, Q_{ij} q_i q_j + \frac{1}{6} m \, Q (\vec{K}^+ \vec{q} \vec{K} \vec{p} - \vec{K}^+ \vec{p}' \vec{K} \vec{q}) \quad (8.10)$$

8.3. Beitrag des elektrischen Quadrupolmomentes zum Zweikörperpotential

Der wichtigste Beitrag zum Zweikörperpotential ist der Monopol-Quadrupol Term. Dieser Anteil ist in $j_o j_o$ der Gl. (6.11) enthalten, wo statt (6.13) und (6.16) die Ströme (8.9) und (8.10) verwendet werden.

$$\Delta U \sim \frac{1}{2} j_o j_o \sim \frac{1}{2} Q_{ij} q_i q_j 8 E^2 Z e + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right) . \quad (8.11)$$

Nach den Integrationsformeln (6.12) folgt das Monopol-Potential im Ortsraum:

$$\begin{aligned} \Delta U(p, r) \sim 8 E^2 Z e \left[\frac{1}{r^3} (Q_{ii} - 3 \frac{Q_{ij} r_i r_j}{r^2}) + \right. \\ \left. + \frac{4\pi}{3} Q_{ii} \delta(r) \right] . \end{aligned} \quad (8.12)$$

Der verjüngte Quadrupoltensor ist Null: $Q_{ii} = 0$. Somit erhalten wir eine $1/r^3$ Abhängigkeit

$$\Delta U(p, r) = - 24 E^2 Z e \frac{Q_{ij} r_i r_j}{r^5} \quad (8.13)$$

Das normierte Monopol-Quadrupolpotential

$$\Delta U(p, r) = - 6 Z e \frac{Q_{ij} r_i r_j}{r^5} \quad (8.14)$$

wird zu (6.19) addiert. Bei einer kovarianten Kopplung nach Absatz 8.1 würden neben dem Hauptterm (8.15) auch noch andere modellabhängige Terme auftreten.

9. Ergebnisse

=====

Aus den relativistischen Gleichungen für Spin 1 Teilchen von Proca (3.1) und Hurley (4.1) wird je eine Quantenelektrodynamik für Teilchen mit Spin 1, Masse m , elektrischer Ladung Z , magnetischem Dipolmoment μ und elektrischem Quadrupolmoment Q abgeleitet.

Jede Feldtheorie beinhaltet einen Matrixformalismus, dessen Dimension durch die Zahl der Komponenten der Wellenfunktion bestimmt wird.

In der Elektrodynamik für Spin $1/2$ sind die Strommatrizen (Vertexfunktionen), Propagatoren und Dichtematrizen 4×4 dimensional, entsprechend den vier Komponenten der Diracschen Bispinoren. Die Proca Gleichung (3.1) bestimmt eine 4×4 dimensionale Theorie, die Hurley Gleichung (4.1) für Spin 1 eine 7×7 dimensionale Theorie. Die linearisierte Form der Proca Gleichung, die als Kemmer Gleichung bekannt ist, bestimmt eine 10×10 dimensionale Theorie.

Wir transformieren die Proca und Hurley Theorie auf eine 3×3 dimensionale Form entsprechend der Zahl der Freiheitsgrade für ein Spin 1 Teilchen. Durch dieses Verfahren lassen sich die Strukturen der beiden Modelle leicht miteinander vergleichen. Die Strommatrizen (Vertexfunktionen) werden im Raum der Spin 1 Matrizen aufgespannt. Die Koeffizienten enthalten die elektrische

Ladung, das magnetische Dipolmoment und das elektrische Quadrupolmoment: Gln. (3.41), (3.42) und (4.30), (4.31). Die Ströme können mit Hilfe von vier modellabhängigen Parametern α , β , δ , ϵ zusammenfassend dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
 j_0(p', p) &= 2ZeE - \alpha(\vec{K}^+ \vec{q} \vec{K} \vec{p} - \vec{K}^+ \vec{p}' \vec{K} \vec{q}) \\
 &+ \beta(\vec{K}^+ \vec{p}' \vec{K} \vec{p}' + \vec{K}^+ \vec{p} \vec{K} \vec{p}) + \frac{1}{3} E q e \left(\frac{3}{2} (S_i S_j + \right. \\
 S_j S_i) - 2\delta_{ij} \Big) q_i q_j ;
 \end{aligned} \tag{9.1}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{j}(p', p) &= Ze(\vec{p}' + \vec{p}) + 2im\mu \vec{S} \times \vec{q} \\
 &+ \delta \vec{S} \vec{p}' \vec{S} \times \vec{q} \vec{S} \vec{p} + \epsilon(\vec{p}' + \vec{p}) \vec{K}^+ \vec{p}' \vec{K} \vec{p} .
 \end{aligned} \tag{9.2}$$

mit

$$\alpha_H = (2m\mu - Ze) E / (E^2 + m^2) , \quad \alpha_P = (2m\mu - Ze) / E ;$$

$$\beta_H = 0, \quad \beta_P = Ze/E; \quad \delta_H = -i(\mu - Ze)/(E^2 + m^2) ,$$

$$\delta_P = 0 ; \quad \epsilon_H = 0, \quad \epsilon_P = -Ze/E .$$

Die Dichtematrizen werden mit den Helizitätsspinoren gebildet : siehe (3.57) und (4.36). Die Propagatoren im Impulsraum für ein Teilchen mit der Helizität λ ist gleich der Dichtematrix $\rho(p, \lambda)$ mal dem Propagator eines skalaren Teilchens mit der Masse m :

$$D_{ij}(p, \lambda) = \frac{\rho(p, \lambda)}{p^2 - m^2}, \quad i, j = 1, 3. \quad (9.3)$$

Mit den neu berechneten Feynman-Regeln ist es möglich, die gesamte Elektrodynamik für Spin 1 Teilchen nachzuvollziehen, soweit sie auf der S-Matrix Theorie aufbaut und renomierbare Graphen enthält.

Als Anwendung berechnen wir die elastische Streuung von Spin 1 Kernen mit verschiedenen Polarisierungen in den Anfangs- und Endzuständen.

Verglichen mit dem Mott-Streuquerschnitt enthalten die relativistischen Streuquerschnitte zusätzlich die relativistischen Effekte (Massenveränderung) sowie die Dipol- und Quadrupolwechselwirkung. Wir stellen die Ergebnisse für die Streuung von N^{14} an N^{14} und Li^6 an Li^6 in zwei Abschnitten getrennt dar.

Im Abschnitt 9.1 werden die Unterschiede in den Streuquerschnitten beider Modelle betrachtet, die unabhängig von der Polarisation der Teilchen sind. Diese Differenzen sind von theoretischem Interesse. In Abschnitt 9.2 geben wir die Unterschiede wieder, die auf der Polarisation der Teilchen beruhen. Diese liegen im Bereich der experimentellen Meßgenauigkeit.

Den optimalen Vergleich der Streuquerschnitte und Polarisierungen erhält man bei einem Streuwinkel von 90° (ungefähr 45° im Laborsystem). Bei diesem Winkel sind

die Beiträge der Direkt-Austausch- und Interferenzamplituden von der gleichen Größenordnung. Zusätzlich ist die Entfernung der Teilchen minimal, so daß die spinabhängigen Kräfte zur Geltung kommen.

Im Gegensatz zur Streuung von verschiedenen Teilchen aneinander erzielt man bei einer 180° Streuung von identischen Teilchen keine besondere Wirkung, da dieser Prozeß durch die Vorwärtsstreuung des entgegenkommenden Strahls überdeckt wird. D.h. bei kleinen und sehr großen Winkeln stellt man überwiegend den Anfangszustand des Projektils oder den des Targets fest.

Die Rechengenauigkeit bei der numerischen Auswertung der verschiedenen Formel beträgt $\pm 10^{-6}$.

9.1. Streuung nichtpolarisierter Teilchen

In den nichtpolarisierten Streuquerschnitten wird über alle Spinrichtungen gemittelt. Die Spinwechselwirkung, in der sich die Modelle wesentlich unterscheiden, fällt heraus.

i. Ein auffallender Unterschied ist die verschiedene Z-Abhängigkeit schon in erster Ordnung der Wechsel-

wirkung. Die Streuquerschnitte der Hurley Theorie $(1,0) \oplus (1/2, 1/2) \cup (0,1) \oplus (1/2, 1/2)$ verhalten sich wie Z^4 , die der Proca Theorie $(1/2, 1/2)$ wie $Z^4 + Z^8$.

In Abbildung 1 ist das Verhältnis des Zwei-Photonen-streuquerschnittes $d\sigma_{\gamma\gamma}$ zu dem totalen Streuquerschnitt $d\sigma_{\text{tot}}$ der Proca Theorie als Funktion der Energie angegeben.

Die Z-Abhängigkeit würde sich auch in der Streuung eines Spin 1 Strahls an zwei verschiedenen Spin 1 Targets mit hohem Z testen lassen.

ii. Die Dichtematrizen der Proca Theorie unterscheiden sich von den Dichtematrizen der Hurley Theorie um einen Faktor $E^2/m^2 \sim (1 + v^2/c^2)$. Es gilt:

$$\rho_P(\lambda=+1) = \rho_H(\lambda=+1)$$

$$\rho_P(\lambda=-1) = \rho_H(\lambda=-1) \quad (9.4)$$

$$\rho_P(\lambda=0) = \frac{E^2}{m^2} \rho_H(\lambda=0) .$$

iii. Die Ausgangsgleichungen der Hurley Theorie sind nicht paritätsinvariant. Durch eine bilineare Kombination der Wellenfunktionen ψ_+ und ψ_- wurde die Theorie paritätsinvariant gemacht. Numerisch läßt sich die Symmetrie der nichtpolarisierten Streuquerschnitte bei Spiegelung des Koordinatensystems überprüfen. Es gilt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(-\theta, \varphi) \quad (9.5)$$

Wenn nur mit einer der Lösungen ψ_+ oder ψ_- gerechnet wird, wird die Bedingung (9.5) bei einer kinetischen Energie von 1 MeV im Schwerpunktsystem bis zu 15% verletzt.

iv. Bei Streuung von nichtpolarisierten Teilchen an einem unpolarisierten Target tritt eine geringe Quadrupolpolarisation auf. D.h. im Ausgangsstrahl überwiegen die Zustände mit Helizität Null: $P_{33} \neq 0$.

9.2. Streuung polarisierter Teilchen (Polarisationseffekte)

Die polarisierten Zustände einer Zweiteilchenreaktion $1+2 \rightarrow 3+4$ $[1(2,4)3]$ werden durch einen Pfeil angezeigt oder durch die Angabe der Helizitäten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ notiert.

i. In Abb. 2 sind die Streuquerschnitte für $\vec{N}^{14}(N^{14}, N^{14})\vec{N}^{14}$ mit der Projektilpolarisation $\lambda_1 = +1$ (rechtszirkular polarisiert), Target unpolarisiert und dem gestreuten Endzustand mit $\lambda_3 = \pm 1, 0$ und unpolarisiert gezeichnet. In Abb. 3 ist zusätzlich das Target polarisiert $\lambda_2 = 0$ (transversale Polarisation). Sonst gelten die gleichen Bedingungen wie in Abb. 2.

Aus diesen Streuquerschnitten werden die Polarisationswahrscheinlichkeiten im Endzustand berechnet, die in Abb. 4 und 5 für $\vec{N}^{14}(N^{14}, N^{14})\vec{N}^{14}$ und $\vec{N}^{14}(\vec{N}^{14}, N^{14})\vec{N}^{14}$ gezeichnet sind. In den Abb. 6, 7 und 8, 9 sind die Vektorpolarisation $P_3(\theta)$ und Tensorpolarisation $P_{33}(\theta)$ aufgetragen.

In den Abb. 2-9 sind die nichtrelativistischen Grenzwerte der entsprechenden Größen gezeichnet, ohne einen Vergleich der relativistischen Modelle anzustreben.

Wir betrachten nun die relativistischen Werte der dritten Komponenten der Vektor- und Tensorpolarisation:

$$P_3(\theta) = p_+(\theta) - p_-(\theta) \quad \text{und} \quad P_{33}(\theta) = 1 - 3p_0(\theta).$$

Hier bezeichnen $p_+(\theta)$, $p_-(\theta)$ und $p_0(\theta)$ die Wahrscheinlichkeit eines unter dem Winkel θ gestreuten Endzustandes mit der Helizität $+1$, -1 , und 0 . Die empfindlichen Meßstellen für die Vektor- und Tensorpolarisation sind die Nullstellen der Komponenten.

Bei 90° im Schwerpunktsystem ist der nichtrelativistische Grenzwert von P_3 Null, unabhängig von der Streuenergie. Die relativistischen Werte P_3^H und P_3^P , siehe Abb. 11a und 12a, sind verschieden von Null und unterscheiden sich voneinander um 14% für $\vec{N}^{14}(N^{14}, N^{14})\vec{N}^{14}$ und um 22% für die zweite Streuung $\vec{N}^{14}(\vec{N}^{14}, N^{14})\vec{N}^{14}$.

Für die Streuung von Li^6 mit den gleichen Polarisierungen weichen die Modellrechnungen um 9% bzw. 64% ab.

$P_{33}(90^\circ)$ ist im NR-Limes ebenfalls energieunabhängig. Die Unterschiede zwischen den relativistischen Modellen betragen 0.1% im ersten Fall Abb. 11b, und weniger als 1.2% im zweiten Fall Abb. 12b.

Die Unterschiede in P_3 sind auf die verschiedenen α Werte in den beiden Modellen zurückzuführen. Der β Parameter trägt weniger als 0.2% zu der Diskrepanz bei.

In Abb. 10 ist die Abb. 11a vergrößert wiedergegeben. Die gestrichelten Linien sind ohne das Quadrupolmoment gerechnet.

ii. Der Bosonencharakter der Spin 1 Teilchen tritt bei der Streuung von polarisierten Teilchen in Erscheinung. Sei ϕ_+ und ϕ_- der Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Teilchen mit parallelem Spin, bzw. antiparallelem Spin in unpolarisierte Endzustände, bei 90° c.m. und kleiner Energie $E \sim m$.

Für Stickstoff erhalten wir $\phi_+ / \phi_- = 0.5$ (Bosonen) während das gleiche Verhältnis für Fermionen (Elektronen) Null ist.^{51,52}

Aus diesen Rechnungen geht hervor, daß die Wechselwirkungen in der Hurley Theorie $(1,0) \oplus (1/2, 1/2) \cup (0,1) \oplus (1/2, 1/2)$ und der Proca Theorie $(1/2, 1/2)$ unterschiedlich sind.

Mit Hilfe der Streuung von polarisierten Kernen kann man die Modelle und somit die zugrundeliegenden Wellen-

gleichungen testen. Zu diesem Zweck müssen allerdings polarisierte Streuquerschnitte unterhalb der Coulombbarriere mit einer Genauigkeit von 10^{-5} für die Vektorpolarisation und 10^{-4} für die Tensorpolarisation gemessen werden.

Die hier entwickelten Methoden können die Grundlage für den Test von relativistischen Wellengleichungen zu höheren Spins ($3/2$, 2 , $5/2$...) bilden.

Figurenbeschreibung

Abb.1. Das Verhältnis des Zweiphotonenstreuquerschnitts

$d\sigma_{\gamma\gamma}(90^\circ)$ zum gesamten Streuquerschnitt $d\sigma_{\text{tot}}(90^\circ) = d\sigma_{\gamma}(90^\circ) + d\sigma_{\gamma\gamma}(90^\circ)$ in der Proca Theorie $[(1/2, 1/2)]$, als Funktion der Energie im Schwerpunktsystem. Mit wachsendem Z gewinnt der Zweiphotonenstreuquerschnitt an Bedeutung. Der Einfluß der Polarisation auf $d\sigma_{\gamma\gamma}/d\sigma_{\text{tot}}$ wird an Hand der Streuung eines Projektils mit Helizität $\lambda_1 = +1$ an einem unpolarisierten Target (1), und an einem polarisierten Target $\lambda_2 = 0$ (2) gezeigt.

Abb.2. Die Winkelverteilung bei fester Energie - 5 MeV

im Schwerpunktsystem - für die elastischen Streuquerschnitte mit verschiedener Endpolarisation von $\vec{N}^{14}(N^{14}, N^{14})\vec{N}^{14}$ (nichtrelativistischer Grenzwert).

Der einfallende Strahl ist rechtszirkular polarisiert:

$\lambda_1 = +1$. Das Target ist unpolarisiert.

Die einzelnen Kurven haben folgende Bedeutung:

- (1) $d\sigma/d\Omega$ ($\lambda_1 = +1, \lambda_3 = +1$)
- (2) $d\sigma/d\Omega$ ($\lambda_1 = +1, \lambda_3 = -1$)
- (3) $d\sigma/d\Omega$ ($\lambda_1 = +1, \lambda_3 = 0$)
- (4) $d\sigma/d\Omega$ ($\lambda_1 = +1, \lambda_3 = \text{unpolarisiert}$)

Abb.3. Die Winkelverteilung bei fester Energie - 5 MeV im Schwerpunktsystem - für die elastischen Streuquerschnitte mit verschiedener Endpolarisation von $\vec{N}^{14}(\vec{N}^{14}, N^{14})\vec{N}^{14}$ (nichtrelativistischer Grenzwert). Der einfallende Strahl ist rechtszirkular polarisiert: $\lambda_1 = +1$. Das Target ist transversal polarisiert: $\lambda_2 = 0$.

Die einzelnen Kurven haben folgende Bedeutung:

- (1) $d\sigma/d\Omega$ ($\lambda_1 = +1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = +1$)
- (2) $d\sigma/d\Omega$ ($\lambda_1 = +1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$)
- (3) $d\sigma/d\Omega$ ($\lambda_1 = +1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$)
- (4) $d\sigma/d\Omega$ ($\lambda_1 = +1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \text{unpolarisiert}$)

Abb.4. Die Winkelverteilung der Polarisationswahrscheinlichkeiten des Endzustandes für die elastische Streuung $\vec{N}^{14}(\vec{N}^{14}, N^{14})\vec{N}^{14}$ bei 5 MeV - kinetischer Energie im Schwerpunktsystem (nichtrelativistischer Grenzwert). Der einfallende Strahl ist rechtszirkular polarisiert: $\lambda_1 = +1$. Das Target ist unpolarisiert.

- i. Die obere Fläche gibt die Wahrscheinlichkeit $p_0(\theta)$ für $\lambda_3 = 0$.
- ii. Die mittlere Fläche gibt die Wahrscheinlichkeit $p_-(\theta)$ für $\lambda_3 = -1$.
- iii. Die untere Fläche gibt die Wahrscheinlichkeit $p_+(\theta)$ für $\lambda_3 = +1$.

Abb.5. Die Winkelverteilung der Polarisationswahrscheinlichkeiten des Endzustandes für die elastische Streuung $\vec{N}^{14}(\vec{N}^{14}, \vec{N}^{14})\vec{N}^{14}$ - bei 5 MeV - kinetischer Energie im Schwerpunktsystem (nichtrelativistischer Grenzwert). Der einfallende Strahl ist rechtszirkular polarisiert: $\lambda_1 = +1$. Das Target ist transversal polarisiert: $\lambda_2 = 0$.

- i. Die obere Fläche gibt die Wahrscheinlichkeit $p_0(\theta)$ für $\lambda_3 = 0$.
- ii. Die mittlere Fläche gibt die Wahrscheinlichkeit $p_-(\theta)$ für $\lambda_3 = -1$.
- iii. Die untere Fläche gibt die Wahrscheinlichkeit $p_+(\theta)$ für $\lambda_3 = +1$.

Abb.6. Die Winkelverteilung der dritten Komponente der Vektorpolarisation $P_3(\theta) = p_+(\theta) - p_-(\theta)$, für die elastische Streuung $\vec{N}^{14}(\vec{N}^{14}, \vec{N}^{14})\vec{N}^{14}$ - bei 5 MeV kinetischer Energie im Schwerpunktsystem ($\lambda_1 = +1$, nichtrelativistischer Grenzwert).

Abb.7. Die Winkelverteilung der dritten Komponente der Vektorpolarisation $P_3(\theta) = p_+(\theta) - p_-(\theta)$, für die elastische Streuung $\vec{N}^{14}(\vec{N}^{14}, \vec{N}^{14})\vec{N}^{14}$ - bei 5 MeV kinetischer Energie im Schwerpunktsystem ($\lambda_1=1, \lambda_2=0$, nichtrelativistischer Grenzwert).

Abb.8. Die Winkelverteilung der dritten Komponente der Tensorpolarisation $P_{33}(\theta) = 1 - 3p_0(\theta)$ für die elastische Streuung $\vec{N}^{14}(\vec{N}^{14}, \vec{N}^{14})\vec{N}^{14}$ - bei 5 MeV im Schwerpunktsystem ($\lambda_1 = +1$, nicht-relativistischer Grenzwert).

Abb.9. Die Winkelverteilung der dritten Komponente der Tensorpolarisation $P_{33}(\theta) = 1 - 3p_0(\theta)$ für die elastische Streuung $\vec{N}^{14}(\vec{N}^{14}, \vec{N}^{14})\vec{N}^{14}$ - bei 5 MeV kinetischer Energie im Schwerpunktsystem ($\lambda_1=+1, \lambda_2=0$, nichtrelativistischer Grenzwert).

Abb.10. Ein Vergleich der Vektorpolarisation $P_3(90^\circ)$ im Schwerpunktsystem in der Hurley-(H) und in der Proca-(P) Theorie. Die Kurven MDQ enthalten die Monopol-, Dipol- und Quadrupolwechselwirkung. Die Kurven MD enthalten lediglich die Monopol- und Dipolwechselwirkung. Man sieht, daß bei Vernachlässigung der Quadrupolwechselwirkung die $P_3(90^\circ)$ Werte tiefer liegen. Der relative Abstand zwischen den Modellen bleibt gleich.

Abb.11. Ein Vergleich der Polarisation in der elastischen Streuung im Schwerpunktsystem $\vec{N}^{14}(N^{14}, N^{14})\vec{N}^{14}$ entsprechend der relativistischen Hurley-(H) und Proca-(P) Wellengleichung. MDQ bezeichnet die Monopol- Dipol- und Quadrupolwechselwirkung, die in den Polarisationsrechnungen mitgenommen sind.

Der einfallende Strahl ist rechtszirkular polarisiert:

$\lambda_1 = +1$, das Target ist unpolarisiert.

a) $P_3(90^\circ)$ - berechnete Differenz 14%.

b) $P_{33}(90^\circ)$ - berechnete Differenz 0.1 %.

Im Einschub wird die Kinematik und die Polarisation der Teilchen gezeigt.

Abb.12. Ein Vergleich der Polarisation in der elastischen Streuung im Schwerpunktsystem $\vec{N}^{14}(\vec{N}^{14}, N^{14})\vec{N}^{14}$ entsprechend der relativistischen Hurley-(H) und Proca-(P) Wellengleichung. MDQ bezeichnet die Monopol-, Dipol- und Quadruplwechselwirkung, die in den Polarisationsrechnungen mitgenommen sind.

Der einfallende Strahl ist rechtszirkular polarisiert

$\lambda_1 = +1$, das Target ist transversal polarisiert

$\lambda_2 = 0$.

a) $P_3(90^\circ)$ - berechnete Differenz 22 %.

b) $P_{33}(90^\circ)$ - berechnete Differenz < 1.2 %.

Im Einschub wird die Kinematik und die Polarisation der Teilchen gezeigt.

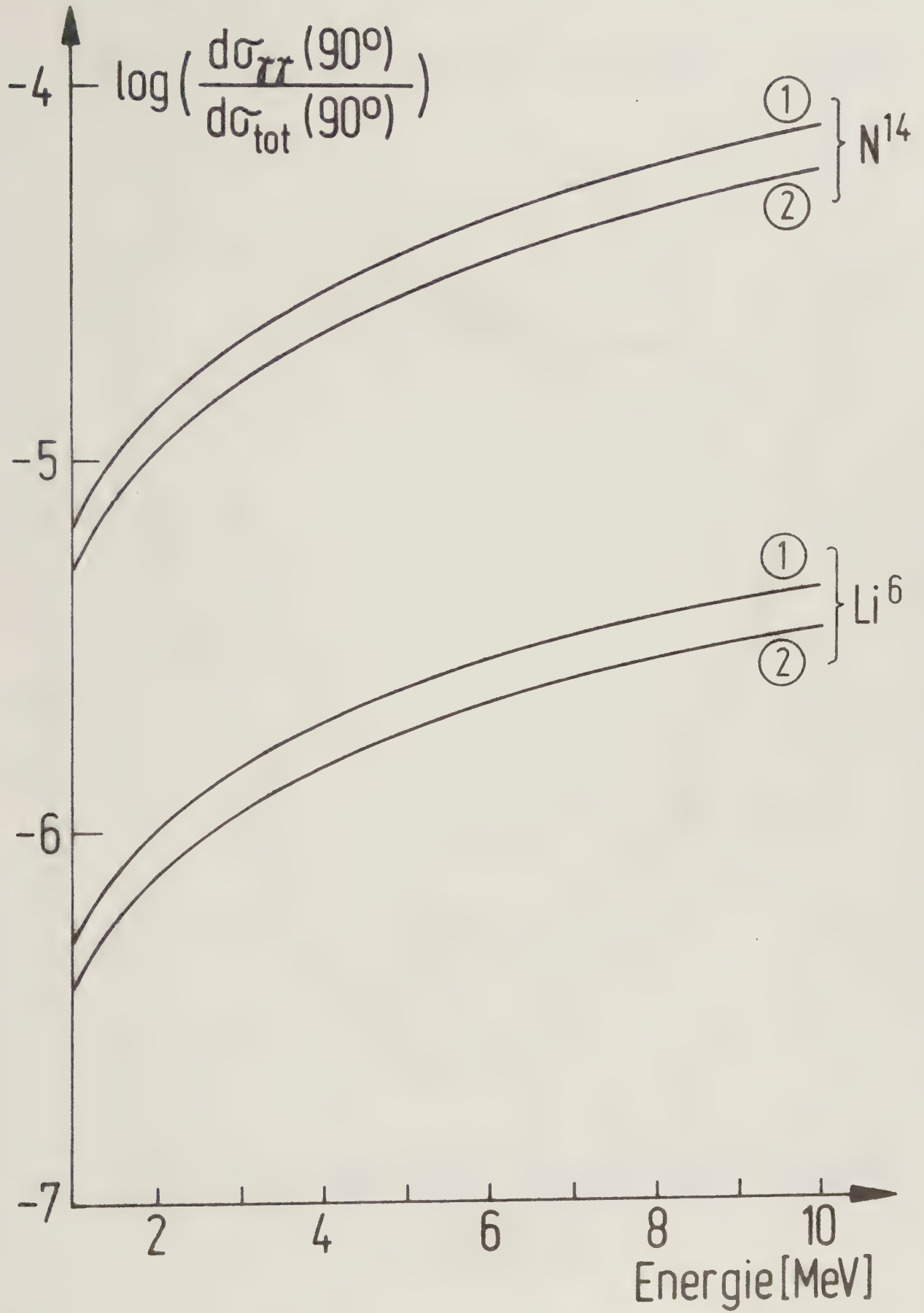


Fig.1

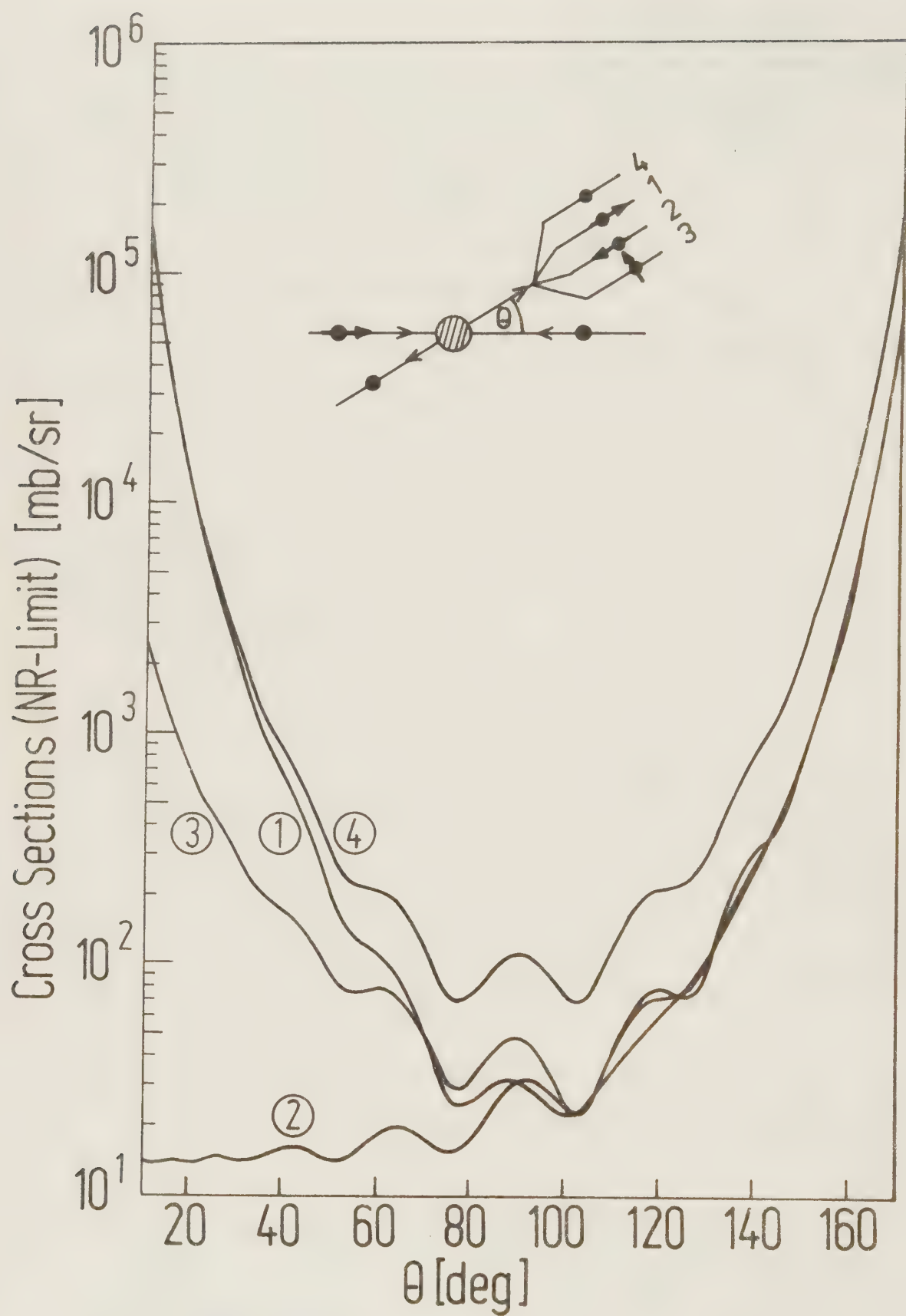


Fig. 2

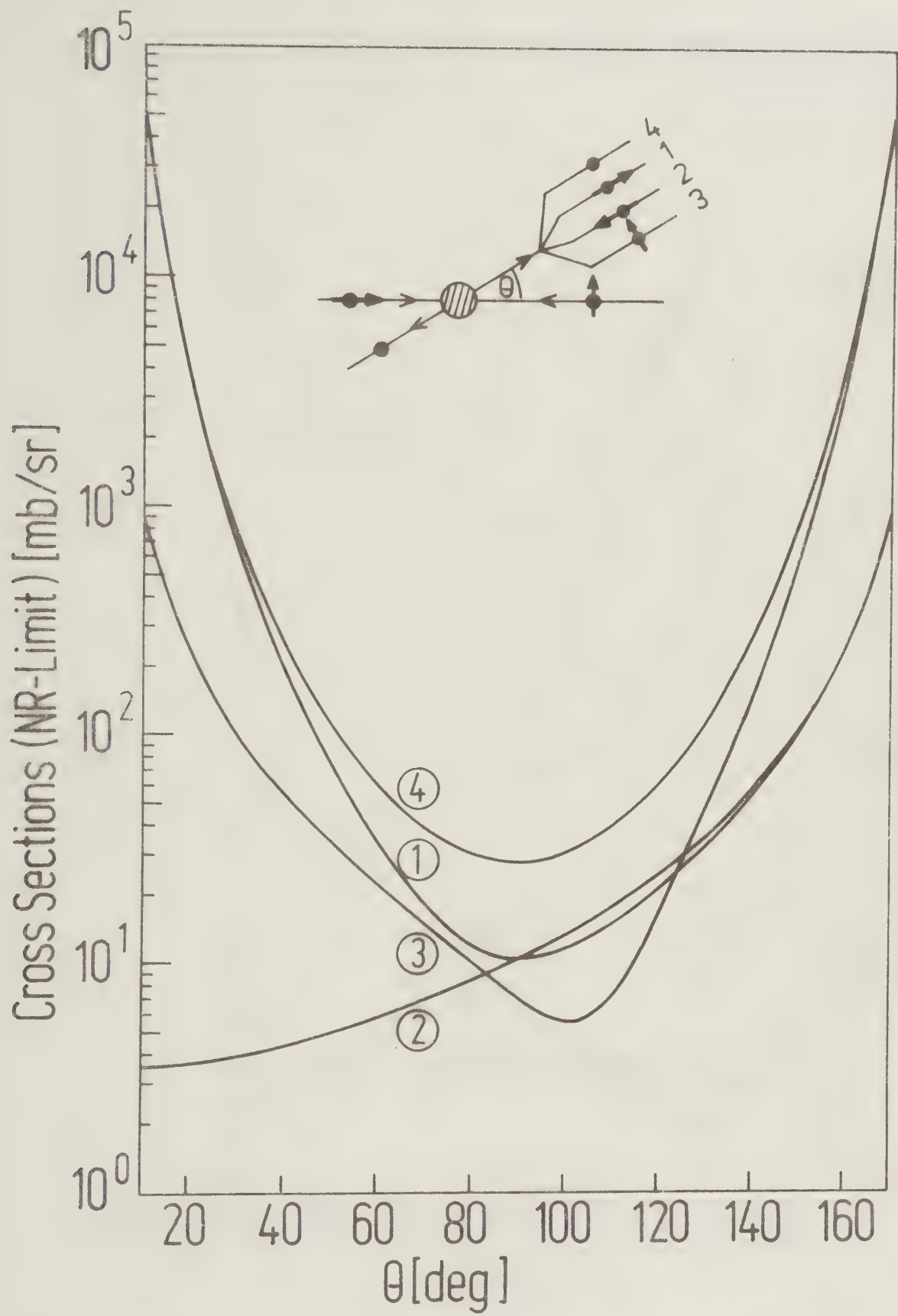


Fig.3

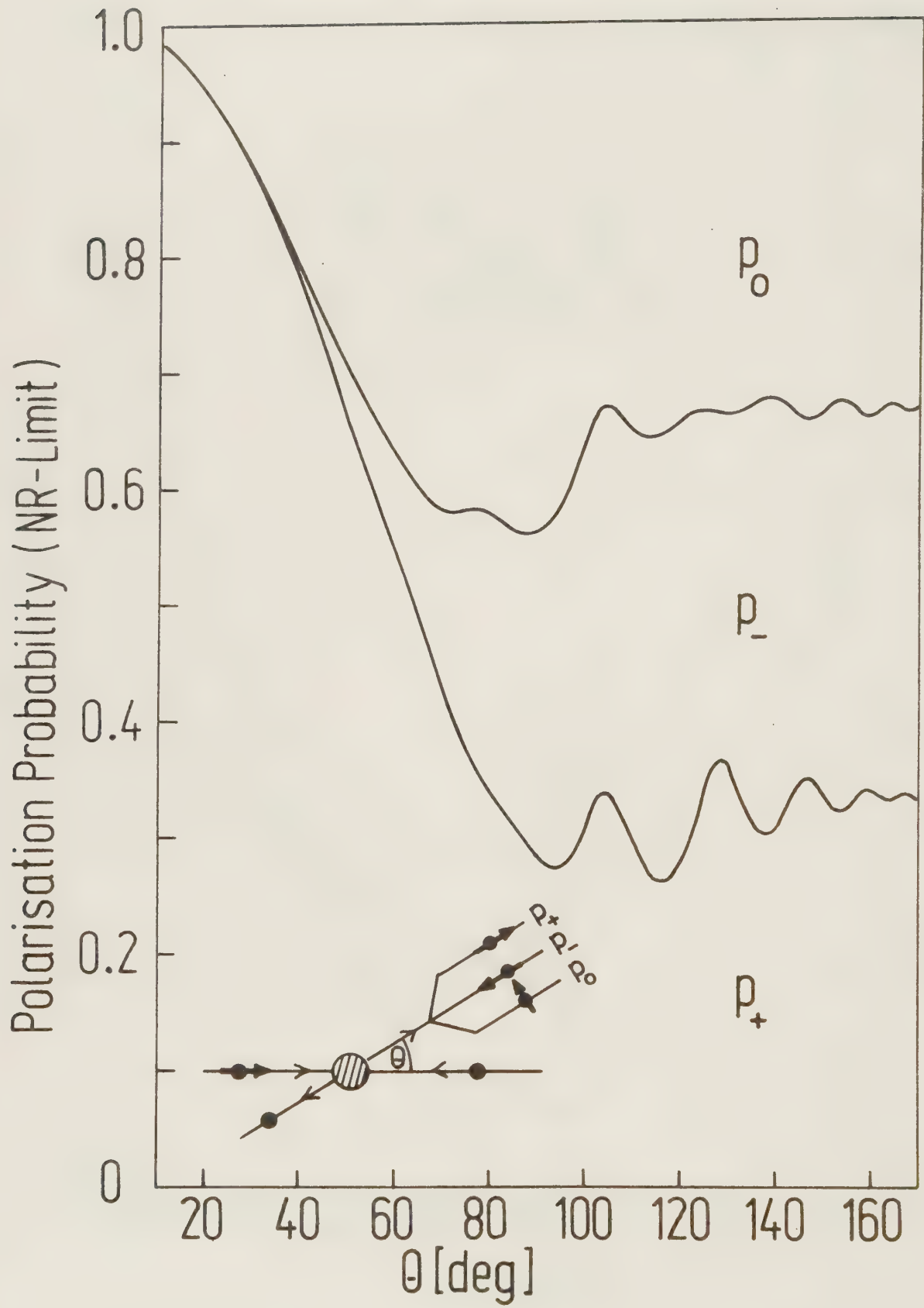


Fig.4

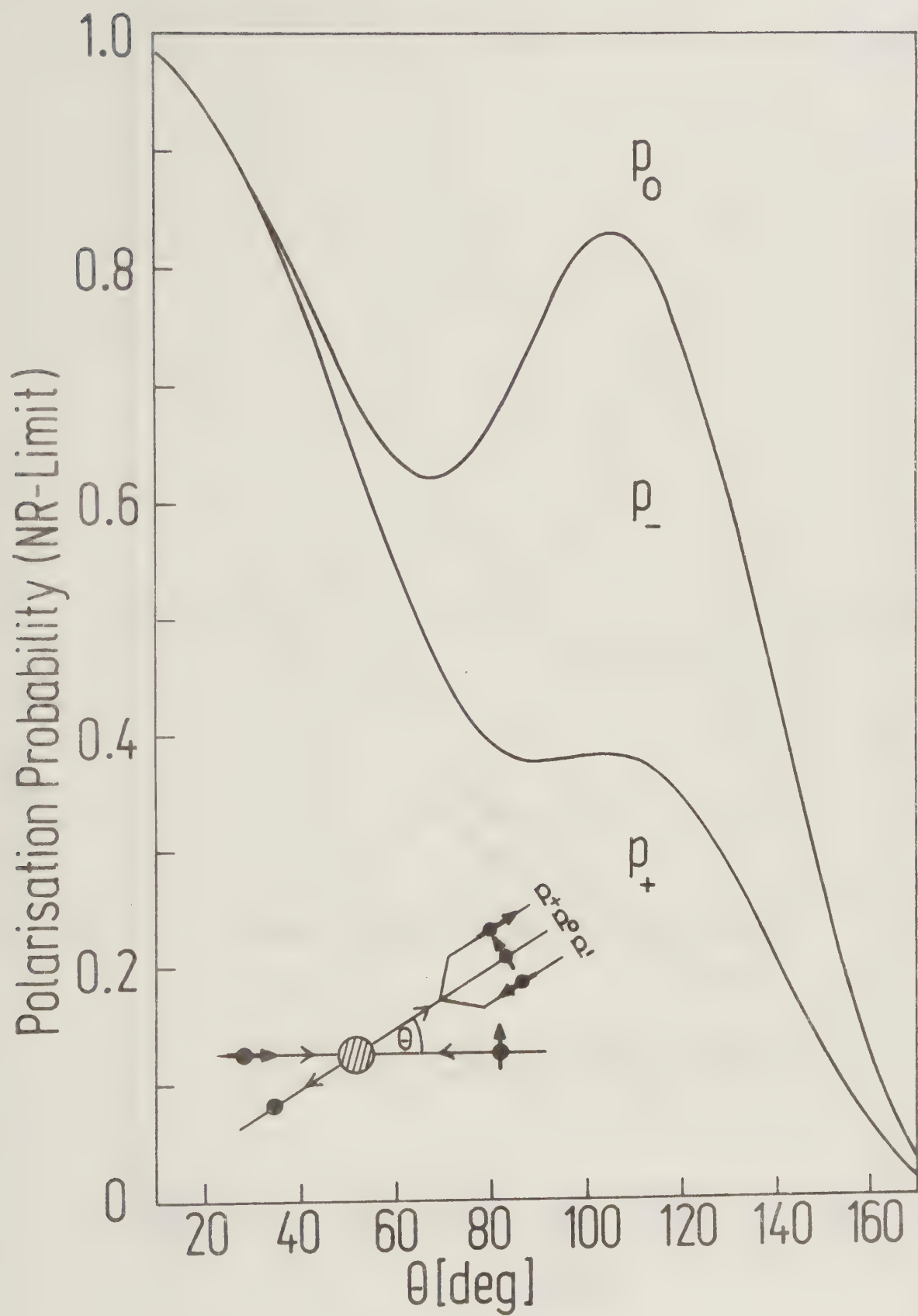


Fig.5

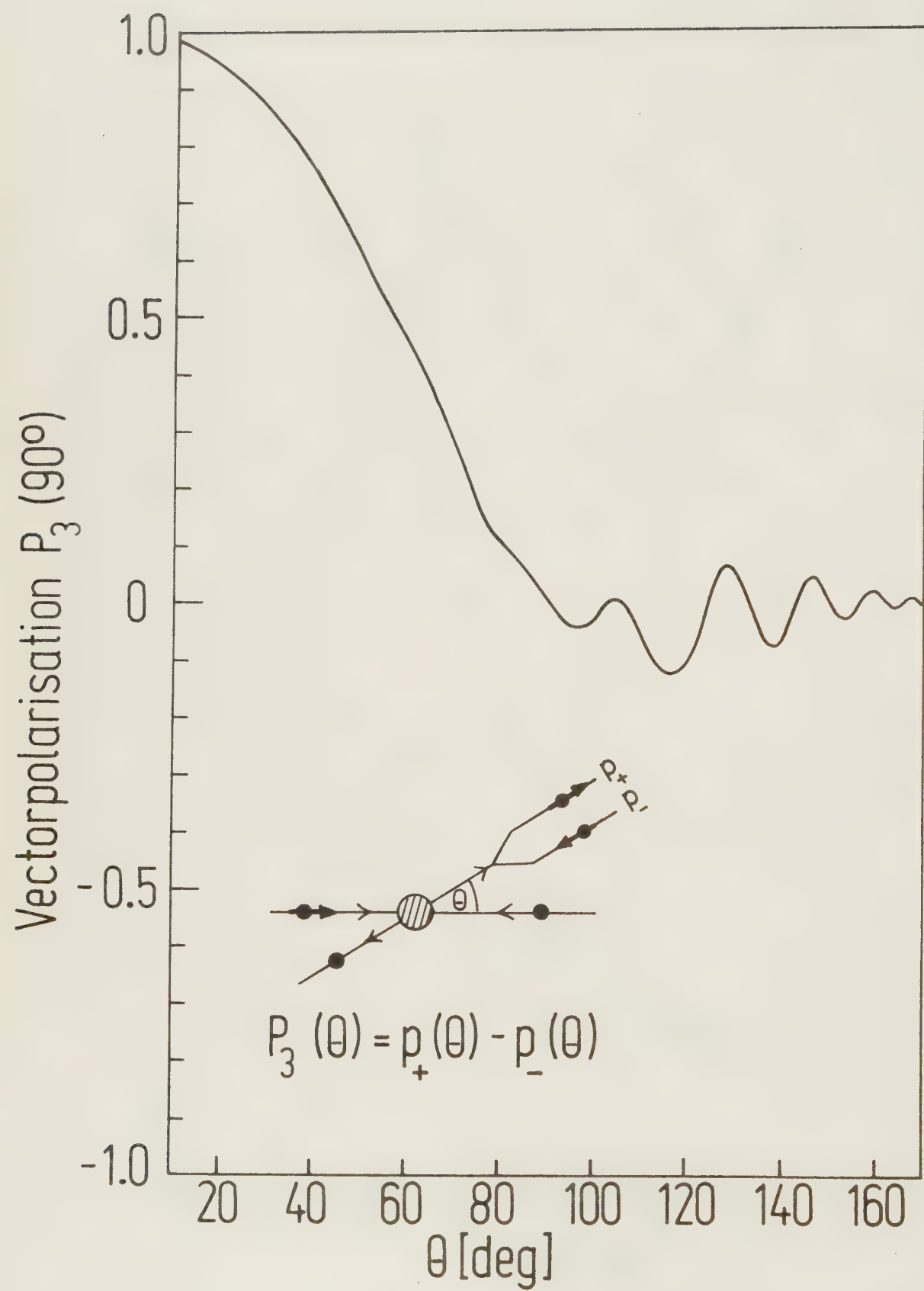


Fig. 6

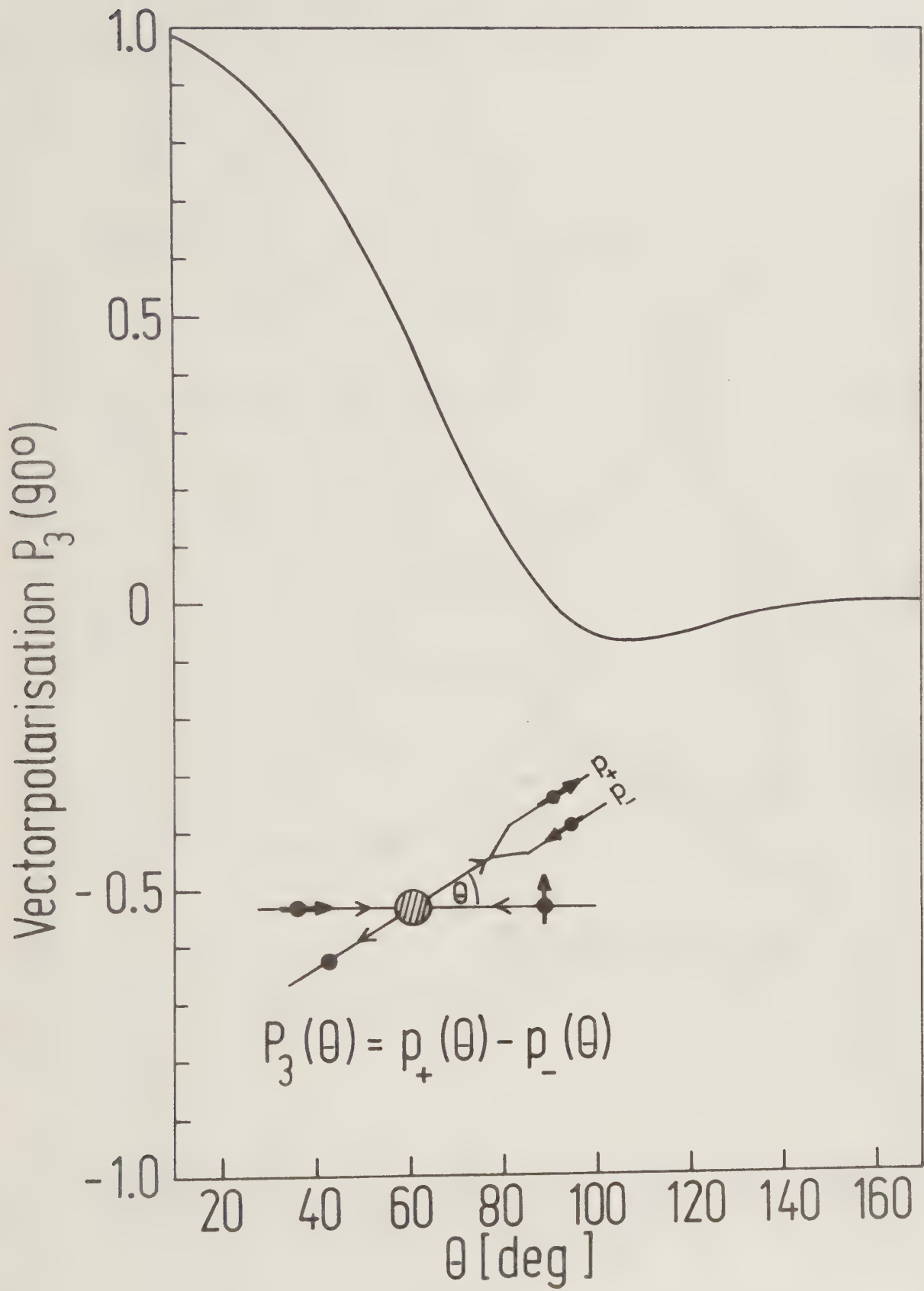


Fig.7

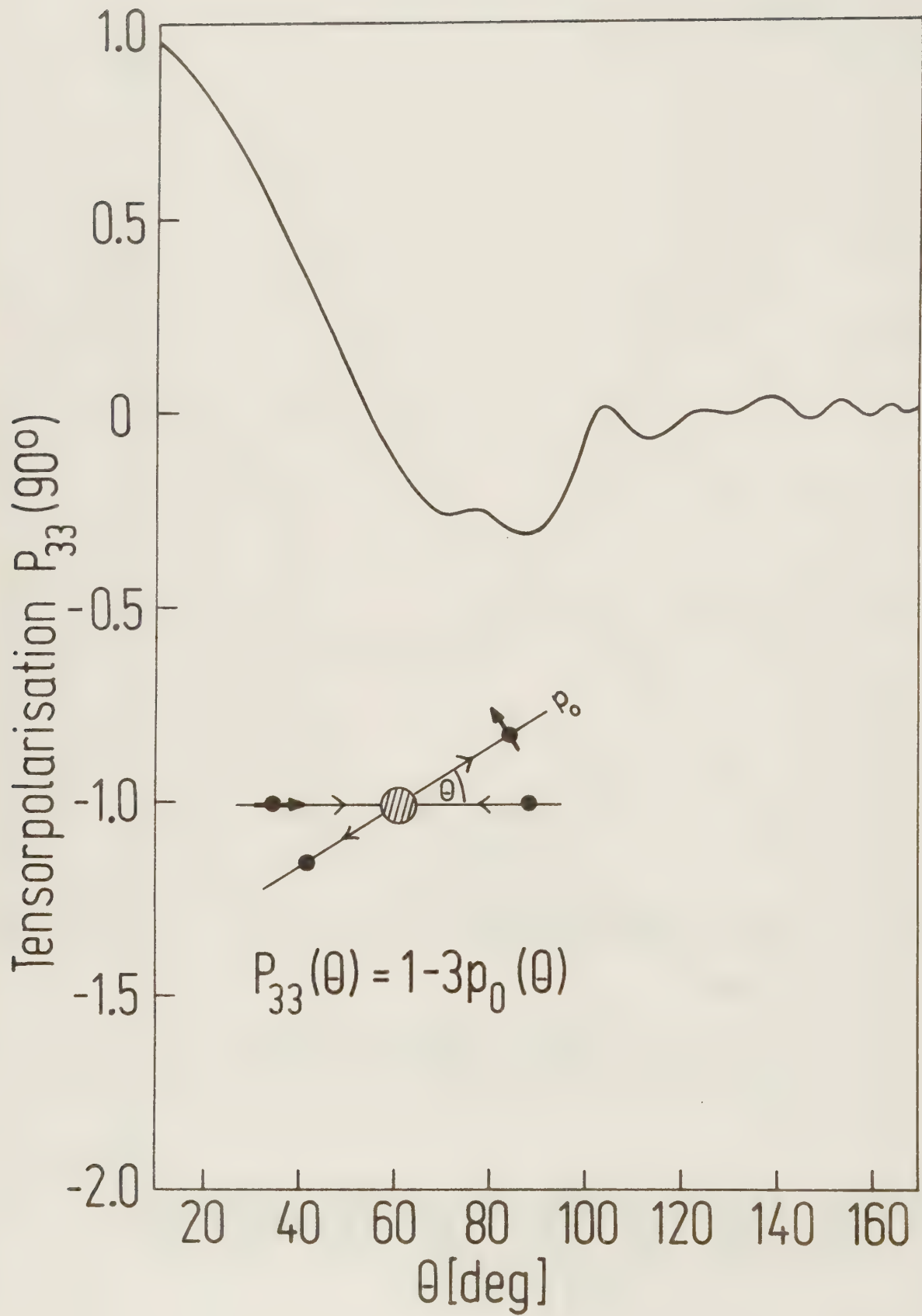


Fig. 8

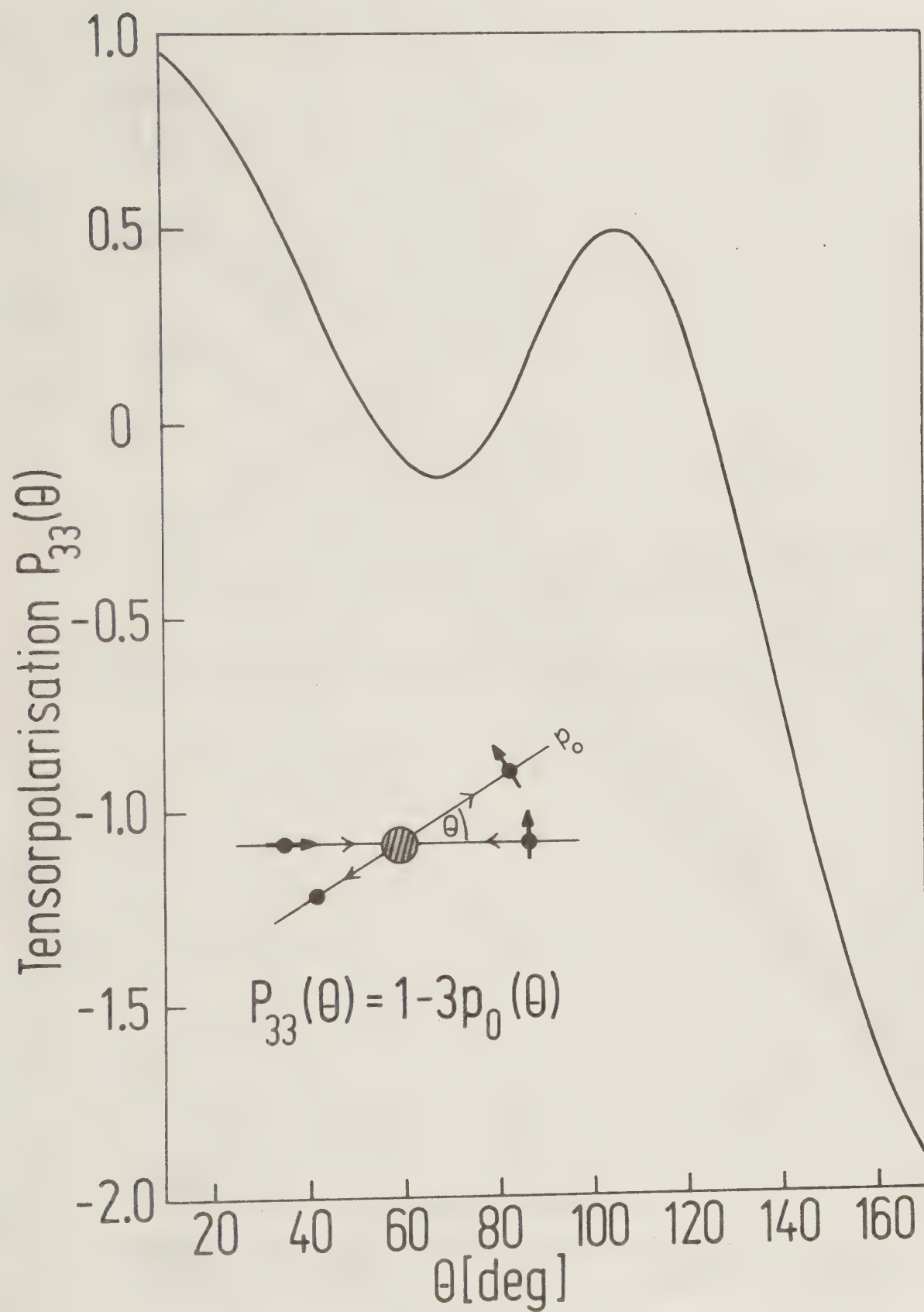


Fig.9

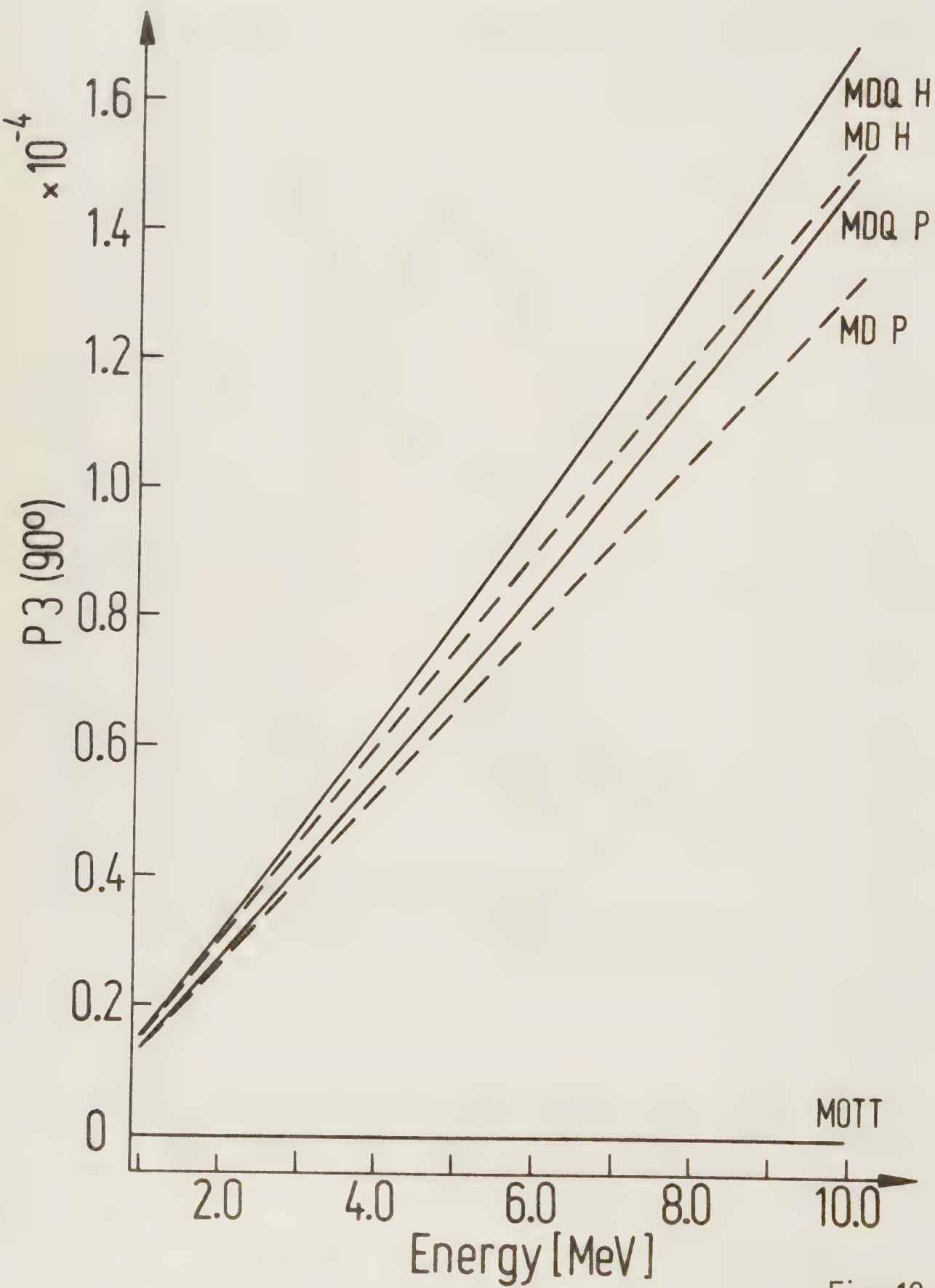


Fig. 10

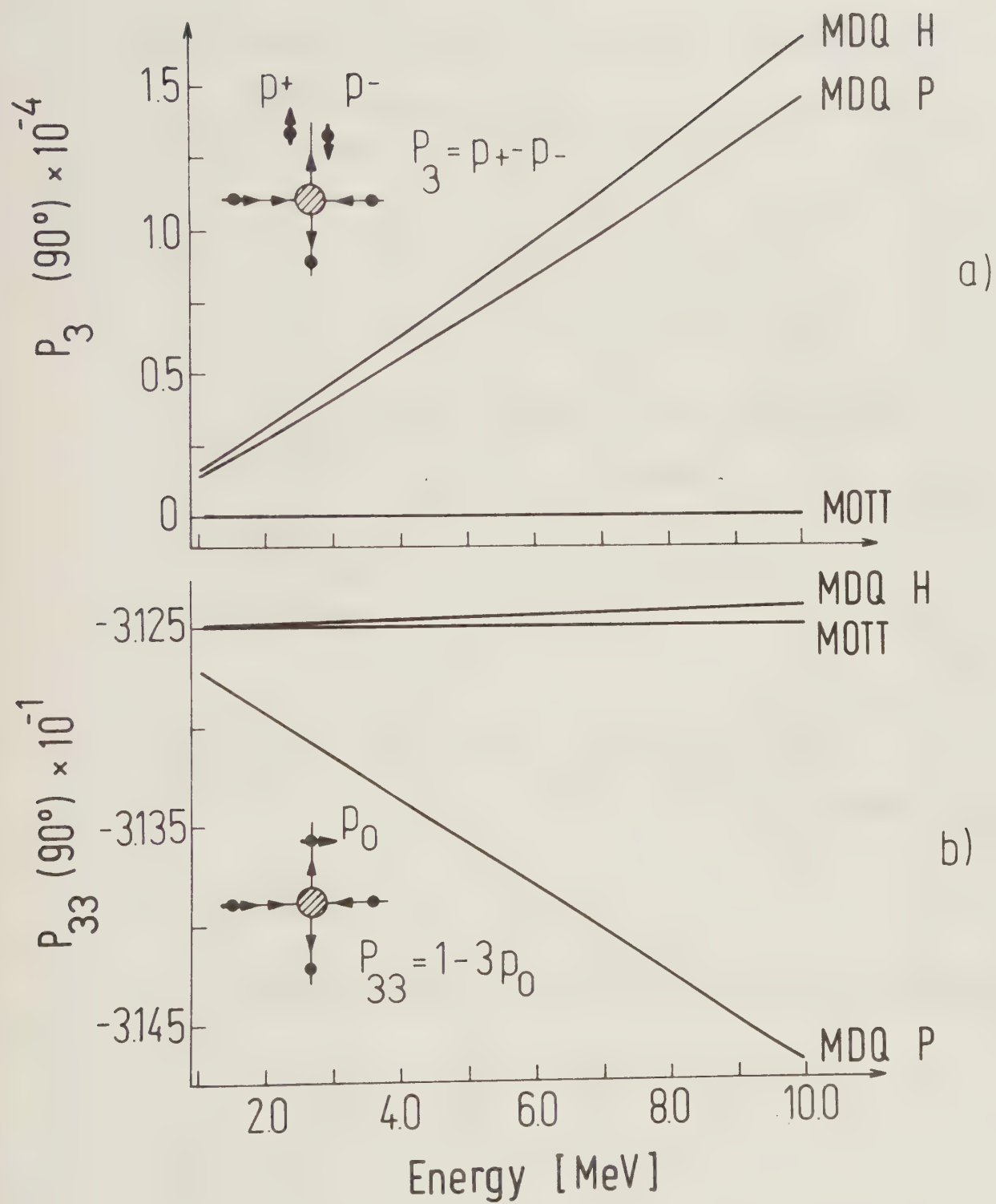


Fig.11

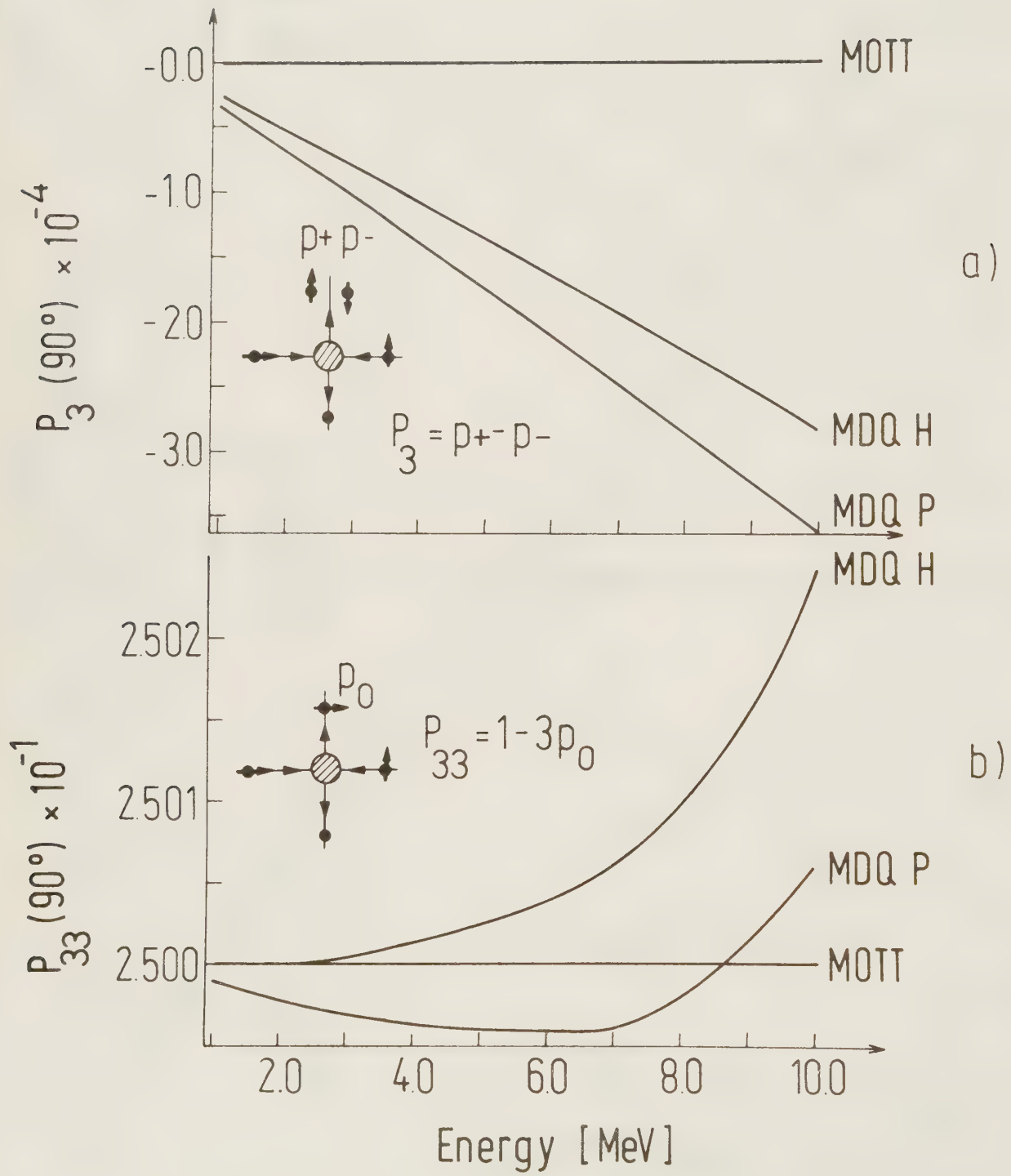


Fig.12

Anhang 1. Spinmatrizen ⁴¹

Wir definieren die Spin 1 Matrizen $\vec{S}$ folgendermaßen:

$$S_a^{lk} = -i \epsilon_{alk}, \quad a, l, k = 1, 2, 3. \quad (1)$$

ϵ_{ijk} ist der Levi-Civita Tensor:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{bei gerader Permutation von } ijk \\ -1 & \text{bei ungerader Permutation von } ijk. \end{cases}$$

Die Spinmatrizen erfüllen die Kommutatorbeziehungen:

$$[S_i, S_j] = i \epsilon_{ijk} S_k. \quad (2)$$

Zusätzlich definieren wir $\vec{K}$ - Matrizen mit den Eigenschaften

$$S_i S_i = 1 - K_i^+ K_i \quad (3)$$

$$S_i S_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} S_k - K_i^+ K_j. \quad (4)$$

Die K - Matrizen ergänzen die Algebra der S - Matrizen für Spin ≥ 1 . Für die Pauli-Matrizen gelten die Gln. (3) und (4) mit $\vec{K} = 0$. In der Darstellung (1) lauten die K - Matrizen für Spin 1:

$$K_1 = (1, 0, 0) , \quad K_2 = (0, 1, 0) , \quad K_3 = (0, 0, 1) . \quad (5)$$

Daraus ergibt sich eine Beziehung, die wir häufig verwenden:

$$(\vec{K}^+ \vec{a} \vec{K} \vec{b})_{mn} = a_m b_n , \quad m, n = 1, 2, 3 . \quad (6)$$

Nach Gl. (1) haben die $\vec{S}$ - Matrizen folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} S_1 &= -i \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & -1 & \cdot \end{vmatrix}, & S_2 &= -i \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \\ S_3 &= -i \begin{vmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

Die Spintensoren

$$S_{ij} = \frac{3}{2} (S_i S_j + S_j S_i) - 2 \delta_{ij} \quad (8)$$

sind symmetrisch $S_{ij} = S_{ji}$, außerdem gilt:

$S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0$. Die fünf unabhängigen Komponenten des Spintensors sind:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \begin{vmatrix} -2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix}, & S_{12} &= -\frac{3}{2} \begin{vmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \\ S_{13} &= -\frac{3}{2} \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \end{vmatrix}, & S_{23} &= -\frac{3}{2} \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{vmatrix}, \\ S_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{vmatrix}; \text{ es folgt } S_{33} = \begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

Anhang 2: Die Ströme der Proca Theorie:

a) Wir setzen in (3.16) den Generator (3.7) ein.

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha}^{*} I_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \varphi_{\beta} &= i \varphi_{\alpha}^{*} (g_{\alpha\mu} g_{\nu\beta} - g_{\alpha\nu} g_{\mu\beta}) \varphi_{\beta} \\ &= i (\varphi_{\mu}^{*} \varphi_{\nu} - \varphi_{\nu}^{*} \varphi_{\mu})\end{aligned}\quad (1)$$

$$F_{\mu\nu} \varphi_{\alpha}^{*} I_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \varphi_{\beta} = 2 i F_{\mu\nu} \varphi_{\mu}^{*} \varphi_{\nu} \quad (2)$$

Die Rechnungen bis (3.32) sind leicht zu übersehen.
Wir gehen weiter von (3.32) aus und berechnen die
reduzierte Form (3.38):

$$\begin{aligned}j_{\mu}(p', \lambda', p, \lambda) &= \epsilon_1^{*}(p', \lambda) \{ Ze(p'+p)_{\mu} \delta_{1k} - Ze p_1 \delta_{k\mu} - \\ &- Ze p'_k \delta_{1\mu} + g_m ((p'-p)_1 \delta_{k\mu} - (p'-p)_k \delta_{1\mu}) \\ &- \frac{p_k}{E} [Ze (p'+p)_{\mu} \delta_{10} - Ze p_1 \delta_{0\mu} - Ze p'_0 \delta_{1\mu} + \\ &+ g_m ((p'-p)_1 \delta_{0\mu} - (p'-p)_0 \delta_{\mu 1})] \\ &- \frac{p'_1}{E} [Ze (p'+p)_{\mu} \delta_{0k} - Ze p_0 \delta_{k\mu} - Ze p'_k \delta_{\mu 0} + \\ &+ g_m ((p'-p)_0 \delta_{\mu k} - (p'-p)_k \delta_{\mu 0})] \\ &- \frac{p'_1 p_k}{E^2} [Ze (p'+p)_{\mu} \delta_{00} - Ze p_0 \delta_{0\mu} - Ze p'_0 \delta_{0\mu} + \\ &+ g_m ((p'-p)_0 \delta_{\mu 0} - (p'-p)_0 \delta_{\mu 0})] \} \epsilon_k(p, \lambda) \quad (3)\end{aligned}$$

$$1, k = 1, 2, 3; \quad p'_0 = p_0 = E$$

Analyse der Zeitkomponente des Stromes

$$\begin{aligned}
 j_o^{lk}(p', p) &= Ze \, 2 \, E \, \delta_{lk} - Ze \, p_l \, \delta_{ko} \\
 &- Ze \, p'_k \, \delta_{ol} + g_m ((p' - p)_l \, \delta_{ok} - (p' - p)_k \, \delta_{ol}) \\
 &- \frac{p_k}{E} [Ze \, 2 \, E \, \delta_{lo} - Ze \, p_l - Ze \, E \, \delta_{lo} + g_m (p' - p)_l] \\
 &- \frac{p'_l}{E} [Ze \, 2 \, E \, \delta_{ko} - Ze \, E \, \delta_{ko} - Ze \, p'_k - g_m (p' - p)_k] \quad (4)
 \end{aligned}$$

l und k nehmen die Werte 1, 2, 3 an, folglich sind δ_{lo} und δ_{ko} gleich Null.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 j_o^{lk}(p', p) &= Ze \left(2 \, E \, \delta_{kl} + \frac{p_k p_l}{E} + \frac{p'_k p'_l}{E} \right) \\
 &- g_m \frac{1}{E} (p_k (p' - p)_l - p'_l (p' - p)_k) \quad (5)
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der K Matrizen folgt:

$$\begin{aligned}
 j_o(p', p) &= Ze \left(2 \, E + \frac{1}{E} (\vec{K}^+ \vec{p} \vec{K} \vec{p} + \vec{K}^+ \vec{p}' \vec{K} \vec{p}') \right) \\
 &- g_m \frac{1}{E} (\vec{K}^+ \vec{q} \vec{K} \vec{p} - \vec{K}^+ \vec{p}' \vec{K} \vec{q}) \quad (6)
 \end{aligned}$$

Analyse der Raumkomponente des Stromes:

$$\begin{aligned}
 j_n^{lk}(p', p) = & Ze (p' + p)_n \delta_{lk} - Ze p_l \delta_{nk} - Ze p'_k \delta_{nl} + \\
 & + g_m ((p' - p)_l \delta_{nk} - (p' - p)_k \delta_{nl}) - \frac{p_k}{E} (-Ze \delta_{nl} E) - \\
 & - \frac{p'_l}{E} (-Ze E \delta_{kn}) - \frac{p'_l p_k}{E^2} Ze (p' + p)_n \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$l, k, n = 1, 2, 3.$$

Mit $\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p}$ schreibt sich (7) :

$$\begin{aligned}
 j_n^{lk} = & Ze \left(\delta_{lk} - \frac{p'_l p_k}{E^2} \right) (p' + p)_n + \\
 & + (Ze + g_m) (q_l \delta_{nk} - q_k \delta_{nl}) \quad (8)
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Spin Matrizen (Anhang 1) kann (8) in Matrixform geschrieben werden:

$$i) p'_l p_k \epsilon_l^*(p') \epsilon_k(p) = \epsilon^+(p') \vec{K}^+ \vec{p}' \vec{K} \vec{p} \epsilon(p) \quad (9)$$

und

$$ii) q_l \delta_{nk} - q_k \delta_{nl} = q_r (\delta_{lr} \delta_{kn} - \delta_{kr} \delta_{ln}) \quad (10)$$

Hier verwenden wir folgende Eigenschaft des Levi-Civita Tensors:

$$\epsilon_{alk} \epsilon_{arn} = \delta_{lk} \delta_{kn} - \delta_{kr} \delta_{ln} \quad (11)$$

Die Spinmatrizen sind

$$S_a^{lk} = -i \epsilon_{alk} \quad (12)$$

Somit folgt:

$$q_l \delta_{nk} - q_k \delta_{nl} = i \epsilon_{nar} S_a^{lk} q_r = i (\vec{S} \times \vec{q})_n^{lk} . \quad (13)$$

Wir erhalten dann :

$$\begin{aligned} \vec{J}(p', p) &= Ze (\vec{p}' + \vec{p}) \left(1 - \frac{1}{E^2} \vec{K}^+ \vec{p}' \cdot \vec{K} \vec{p}\right) + \\ &+ i (Ze + g_m) (\vec{S} \times \vec{q}) . \end{aligned} \quad (14)$$

Der statische magnetische Formfaktor g_m folgt aus der Gleichung

$$\begin{aligned} Ze + g_m &= 2 m \mu = 2 m (1 + g_a) \frac{e}{2 m_p} \\ g_m &= Ze \left[(1 + g_a) \frac{m}{2 m_p} - 1 \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Durch Einsetzen von g_m in (6) und (14) erhalten wir (3.41) bzw. (3.42) .

Anhang 3: Die Ströme der Hurley Theorie

Ausgehend von Gl. (4.18) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 L(x) = & u^+(-p') e^{ip'x} \left[+ i\beta_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - iZe A_\mu(q) e^{-iqx} \right) \right] \cdot \\
 & u(p) e^{-ipx} + u^+(p') e^{ip'x} \left[-i\beta_\mu^+ \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + iZe A_\mu(q) \cdot \right. \right. \\
 & \left. \left. e^{-iqx} \right) \right] u(-p) e^{-ipx} + g_m \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\nu(q) e^{-iqx} - \right. \\
 & \left. - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu(q) e^{-iqx} \right) \{ u^+(-p') e^{ip'x} I_{\mu\nu} u(p) e^{-ipx} \\
 & + u^+(p') e^{ip'x} I_{\mu\nu}^+ u(-p) e^{-ipx} \} . \quad (1)
 \end{aligned}$$

Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\nu(q) e^{-iqx} = -iq_\mu A_\nu(q) e^{-iqx} \quad (2)$$

$$(q_\mu \delta_{\nu\sigma} - q_\nu \delta_{\mu\sigma}) I_{\mu\nu} = 2 q_\mu I_{\mu\sigma} . \quad (3)$$

Nach (4.21) und mit (2) und (3) berechnen wir den Strom im Impulsraum. Wir ersetzen Ze und g_m durch F_e und F_m .

$$\begin{aligned}
 j_\mu(p', p) = & F_e (u^+(-p') \beta_\mu u(p) + u^+(p') \beta_\mu^+ u(-p)) \\
 & - 2 i F_m q_\sigma (u^+(-p') I_{\sigma\mu} u(p) + u^+(p') I_{\sigma\mu}^+ u(-p)) . \quad (4)
 \end{aligned}$$

Weiterhin berechnen wir die reduzierte 3×3 Form des Stromes.

Berechnung der Zeitkomponente des Stromes

$$j_0(p', p) = u^+(-p') [F_e \beta_0 - 2i F_m I_{\nu 0} q_\nu] u(p) + \\ + u^+(p') [F_e \beta_0 - 2i F_m I_{\nu 0}^+ q_\nu] u(-p) \quad (5)$$

Die Zeitkomponente j_0 besteht aus zwei Teilen

$j_0 = I + II$, wobei II sich aus I durch Hermite'sche Konjugation und Vertauschen von $\vec{p}$ und $\vec{p}'$ berechnet.

Wir berechnen den ersten Teil der Gl.(5)

$$I = u^+(-p') A u(p) \quad (6)$$

wobei

$$A = F_e \beta_0 - 2i F_m (-I_{10} q_1 - I_{20} q_2 - I_{30} q_3) \quad (7)$$

oder in Matrizenform (mit der Bezeichnung $a = -F_m/F_e$)

$$A = F_e \begin{vmatrix} 1 + a \vec{S} \vec{q} & a \vec{S} \vec{q} & \sqrt{2} a \vec{K}^+ \vec{q} \\ a \vec{S} \vec{q} & -1 + a \vec{S} \vec{q} & -\sqrt{2} a \vec{K}^+ \vec{q} \\ \sqrt{2} a \vec{K} \vec{q} & -\sqrt{2} a \vec{K} \vec{q} & 0 \end{vmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
I = F_e N^2 f^+ (\lambda') \cdot \{ \\
(m + E + \vec{S} \vec{p}') (m + E - \vec{S} \vec{p} + 2 m a \vec{S} \vec{q} + 2 a \vec{K}^+ \vec{q} \vec{K} \vec{p}) + \\
+ (m - E - \vec{S} \vec{p}') (-m + E - \vec{S} \vec{p} + 2 m a \vec{S} \vec{q} - 2 a \vec{K}^+ \vec{q} \vec{K} \vec{p}) - \\
- \sqrt{2} \vec{K}^+ \vec{p}' (2\sqrt{2} a E \vec{K} \vec{q} - 2\sqrt{2} a \vec{K} \vec{q} \vec{S} \vec{p}) \} f(\lambda) \quad (9)
\end{aligned}$$

N ist der Normierungsfaktor der Lösungen der Wellengleichung, und $f(\lambda)$ sind die Helizitätsspinoren (4.15) - (4.17).

Ohne die $f(\lambda)$ -Spinoren hat (9) folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
I = F_e N^2 (4m E + 2m (1 + ma) \vec{S} \vec{q} + 4 a E (\vec{K}^+ \vec{q} \vec{K} \vec{p} - \\
- \vec{K}^+ \vec{p}' \vec{K} \vec{q}) + 4 a (\vec{S} \vec{p}' \vec{K}^+ \vec{q} \vec{K} \vec{p} + \vec{K}^+ \vec{p}' \vec{K} \vec{q} \vec{S} \vec{p})). \quad (10)
\end{aligned}$$

Aus (10) ergibt sich II:

$$\begin{aligned}
II = I^+ (\vec{p}', \vec{p}) = F_e N^2 (4 m E - 2 m (1 + 2 m a) \vec{S} \vec{q} \\
+ 4 a E (- \vec{K}^+ \vec{p}' \vec{K} \vec{q} + \vec{K}^+ \vec{q} \vec{K} \vec{p}) + 4 a (- \vec{K}^+ \vec{p}' \vec{K} \vec{q} \vec{S} \vec{p} - \\
- \vec{S} \vec{p}' \vec{K}^+ \vec{q} \vec{K} \vec{p}) . \quad (11)
\end{aligned}$$

Die Summe von (10) und (11) liefert die Zeitkomponente des Stromes in Matrixform:

$$j_0(p', p) = F_e N^2 (8m E + 8 a E (\vec{K}^+ \vec{q} \vec{K} \vec{p} - \vec{K}^+ \vec{p}' \vec{K} \vec{q})) \quad (12)$$

Der Strom $j_0(p', p)$ bestimmt die Teilchendichte der Spin 1 Theorie. Zur Berechnung von relativistisch invarianten Streuquerschnitten ist folgende Normierung vorteilhaft:²⁹

$$\frac{1}{F_e} j_0(p, p) = \langle p | p \rangle = 2 E, \quad (13)$$

$$\text{weshalb} \quad N^2 = (4 m)^{-1} \quad \text{ist.} \quad (14)$$

Für die Berechnung der elektromagnetischen Momente ist die Normierung zu eins in (13) vorteilhaft, d.h. $N^2 = (8 m^2)^{-1}$.

Berechnung der Raumkomponenten des Stromes

Aus Gl. (4) folgt

$$\begin{aligned} j_i(p', p) &= F_e (u^+(-p') \beta_i u(p) + u^+(p') \beta_i^+ u(-p)) \\ &- 2 i F_m (u^+(-p') I_{0i} q_0 u(p) + u^+(p') I_{0i}^+ q_0 u(-p)). \end{aligned} \quad (15)$$

Wir ordnen den Strom um:

$$\begin{aligned} j_i(p', p) &= u^+(-p') (F_e \beta_i - 2 i F_m I_{0i} q_0) u(p) \\ &+ u^+(p') (F_e \beta_i^+ - 2 i F_m I_{0i}^+ q_0) u(-p) \end{aligned} \quad (16)$$

Die Auswertung von (16) ist analog der Berechnung von (5), wobei anstelle von A (Gl. (7)) die Matrix B_i tritt:

$$B_i = F_e \beta_i - 2 i F_m I_{oi} q_\sigma . \quad (17)$$

Allgemein gilt:

$$I_{oi} q_\sigma = - \epsilon_{irs} J_r q_s , \quad (18)$$

J_r sind die Generatoren (4.6).

Mit der Bezeichnung $b = 2 F_m/F_e$ lautet $\vec{B}$:

$$\vec{B} = F_e \begin{vmatrix} i b \vec{S} \times \vec{q} & \vec{S} & \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{K}^+ \\ - \vec{S} & i b \vec{S} \times \vec{q} & \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{K}^+ \\ - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{K} & - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{K} & 0 \end{vmatrix} \quad (19)$$

Berechnung des ersten Terms der Gleichung $\vec{j} = \vec{I} + \vec{II}$:

$$\begin{aligned} \vec{I} = F_e N^2 \{ & i b (m^2 + E^2) \vec{S} \times \vec{q} + i b E (\vec{S} \cdot \vec{p} \vec{S} \times \vec{q} - \\ & - \vec{S} \times \vec{q} \vec{S} \cdot \vec{p}) - i b \vec{S} \cdot \vec{p} \vec{S} \times \vec{q} \vec{S} \cdot \vec{p} - m (\vec{S} \vec{S} \cdot \vec{p} + \\ & + \vec{S} \cdot \vec{p} \vec{S} + \vec{K}^+ \vec{K} \cdot \vec{p} + \vec{K}^+ \cdot \vec{p} \vec{K}) \} . \end{aligned} \quad (20)$$

Aus (20) folgt $\vec{II}$:

$$\begin{aligned} \vec{II} = \vec{I}^+ (\vec{p}', \vec{p}) &= F_e N^2 \{ i b (m^2 + E^2) \vec{S} \times \vec{q} + \\ &+ i b E (\vec{S} \times \vec{q} \vec{S} \cdot \vec{p}' - \vec{S} \cdot \vec{p}' \vec{S} \times \vec{q}) \\ &- i b \vec{S} \cdot \vec{p}' \vec{S} \times \vec{q} \vec{S} \cdot \vec{p} + m (\vec{S} \cdot \vec{p}' \vec{S} + \vec{S} \vec{S} \cdot \vec{p} + \vec{K}^+ \vec{K} \cdot \vec{p} + \\ &+ \vec{K}^+ \cdot \vec{p}' \vec{K}) \} \end{aligned} \quad (21)$$

Die Summe von (20) und (21) gibt:

$$\begin{aligned} \vec{J} (\vec{p}', \vec{p}) &= F_e N^2 \{ 2 i b (m^2 + E^2) \vec{S} \times \vec{q} - \\ &- 2 i b \vec{S} \cdot \vec{p}' \vec{S} \times \vec{q} \vec{S} \cdot \vec{p} + 2 m (\vec{S} \vec{S} \cdot \vec{p} + \vec{S} \cdot \vec{p}' \vec{S} + \\ &+ \vec{K}^+ \vec{K} \cdot \vec{p} + \vec{K}^+ \cdot \vec{p}' \vec{K}) \} . \end{aligned} \quad (22)$$

Der letzte Term wird anhand der algebraischen Beziehung zwischen den $\vec{S}$ - und $\vec{K}$ -Matrizen umgewandelt. Dabei verwenden wir eine vektorielle Form von (4) aus Anhang 1:

$$\vec{S} \vec{S} \cdot \vec{p} + \vec{K}^+ \vec{K} \cdot \vec{p} = i (\vec{p} \times \vec{S}) + \vec{p} \quad (23)$$

und gleichfalls

$$\vec{S} \cdot \vec{p}' \vec{S} + \vec{K}^+ \cdot \vec{p}' \vec{K} = -i (\vec{p}' \times \vec{S}) + \vec{p}' . \quad (24)$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} \vec{S} \cdot \vec{S} \cdot \vec{p} + \vec{S} \cdot \vec{p} \cdot \vec{S} + \vec{K}^+ \cdot \vec{K} \cdot \vec{p} + \vec{K}^+ \cdot \vec{p} \cdot \vec{K} = \\ = \vec{p}' + \vec{p} + i \vec{S} \times \vec{q} . \end{aligned} \quad (25)$$

Die Vektorkomponente des Stromes nimmt mit (25) die endgültige Form an:

$$\begin{aligned} \vec{j} (p', p) = F_e N^2 (4 m (\vec{p}' + \vec{p}) + 4 m i (1 + \\ + b \frac{(m^2 + E^2)}{m}) \vec{S} \times \vec{q} - 4 i b \vec{S} \cdot \vec{p}' \vec{S} \times \vec{q} \vec{S} \cdot \vec{p}) . \end{aligned} \quad (26)$$

Der Term $\vec{S} \times \vec{q}$ in (26) beschreibt die magnetische Wechselwirkung des Teilchens. Der Vorfaktor muß dem gesamten magnetischen Moment des Teilchens gleich sein.

$$(F_e + 2 F_m \frac{E^2 + m^2}{m}) = 2 m \mu = 2 m (1 + g_a) \frac{e}{2 m_p} . \quad (27)$$

Daraus folgt

$$F_m = \frac{1}{2} \{ (1 + g_a) \frac{m e}{m_p} - F_e \} \frac{m}{E^2 + m^2} \quad (28)$$

Wir setzen $F_e = Ze$, $g_m = F_m$ sowie $N^2 = (4 m)^{-1}$ in Gl. (12) ($a = -F_m/F_e$) und Gl. (26) ($b = 2 F_m/F_e$) ein und erhalten die Stromkomponenten (4.31) und (4.30) .

Anhang 4. Zweikörperpotentiale

Die Strukturen (6.13) und (6.14) sind grundlegend für die folgenden Rechnungen.

$$j_0(p', p) \rightarrow j_0(q, p) = 2 Ze E + \alpha(\vec{K}^+ \vec{q} \vec{K} \vec{p} - \vec{K}^+ \vec{q} \vec{K} \vec{q} - \vec{K}^+ \vec{p} \vec{K} \vec{q}) + \beta(\vec{K}^+ (\vec{q} + \vec{p}) \vec{K} (\vec{q} + \vec{p}) + \vec{K}^+ \vec{p} \vec{K} \vec{p}) \quad (1)$$

bzw. aufgeschachtelt:

$$j_0(q, p) = 2 Ze E + (\alpha + \beta) \vec{K}^+ \vec{q} \vec{K} \vec{p} + (\beta - \alpha) \vec{K}^+ \vec{q} \vec{K} \vec{q} + (\beta - \alpha) \vec{K}^+ \vec{p} \vec{K} \vec{q} + 2 \beta \vec{K}^+ \vec{p} \vec{K} \vec{p} . \quad (2)$$

Die Vektorkomponente des Stromes in der $1/c^2$ Näherung ist:

$$\vec{j}(q, p) = Ze (\vec{q} + 2 \vec{p}) + 2 i m \mu \vec{S} \times \vec{q} . \quad (3)$$

Das Potential im Impulsraum ist nach (6.11)

$$U(p, q) = \frac{1}{4m^2} \frac{4\pi}{q^2} [j_0^{(1)}(p, q) j_0^{(2)}(p, q) + \vec{j}^{(1)}(p, q) \cdot \vec{j}^{(2)}(p, q)] \quad (4)$$

Unter Vernachlässigung höherer Terme berechnen wir die Produkte in (4) mit (2) und (3).

$$j_o^{(1)}(p, q) j_o^{(2)}(p, q) = 4 Z^2 e^2 E^2 + 2 Ze E [(\alpha + \beta) *]$$

$$\begin{aligned} & (\vec{K}_1^+ \vec{q} \vec{K}_1 \vec{p} + \vec{K}_2^+ \vec{q} \vec{K}_2 \vec{p}) + (\beta - \alpha) (\vec{K}_1^+ \vec{q} \vec{K}_1 \vec{q} + \\ & + \vec{K}_2^+ \vec{q} \vec{K}_2 \vec{q}) + (\beta - \alpha) (\vec{K}_1^+ \vec{p} \vec{K}_1 \vec{q} + \vec{K}_2^+ \vec{p} \vec{K}_2 \vec{q}) + \\ & + 2 \beta (\vec{K}_1^+ \vec{p} \vec{K}_1 \vec{p} + \vec{K}_2^+ \vec{p} \vec{K}_2 \vec{p})] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \vec{j}^{(1)}(p, q) \vec{j}^{(2)}(p, q) &= Z^2 e^2 (\vec{q}^2 + 4 \vec{p} \vec{q} + 4 \vec{p}^2) + \\ &+ 4 i m \mu Ze \vec{p} (\vec{S}_1 + \vec{S}_2) \times \vec{q} - 4 m^2 \mu^2 (\vec{S}_1 \times \vec{q}) * \\ &(\vec{S}_2 \times \vec{q}) \end{aligned} \quad (6)$$

Jeder Term der Gln.(5) und (6) wird einzeln nach den Formeln (6.12) transformiert:

$$\frac{4\pi}{\vec{q}^2} \rightarrow \frac{1}{r} \quad (7)$$

$$\frac{4\pi}{\vec{q}^2} (\vec{K}_1^+ \vec{q} \vec{K}_1 \vec{p} + \vec{K}_2^+ \vec{q} \vec{K}_2 \vec{p}) \rightarrow \frac{i}{r^3} (\vec{K}_1^+ \vec{r} \vec{K}_1 \vec{p} + \vec{K}_2^+ \vec{r} \vec{K}_2 \vec{p}) \quad (8)$$

$$\frac{4\pi}{\vec{q}^2} (\vec{K}_1^+ \vec{p} \vec{K}_1 \vec{q} + \vec{K}_2^+ \vec{p} \vec{K}_2 \vec{q}) \rightarrow \frac{i}{r^3} (\vec{K}_1^+ \vec{p} \vec{K}_1 \vec{r} + \vec{K}_2^+ \vec{p} \vec{K}_2 \vec{r}) \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{q^2}(\vec{K}_1^+ \vec{q} \vec{K}_1 \vec{q} + \vec{K}_2^+ \vec{q} \vec{K}_2 \vec{q}) &\rightarrow \frac{1}{r^3}(\vec{K}_1^+ \vec{K}_1 + \vec{K}_2^+ \vec{K}_2 - \\
&- \frac{3}{r^2}(\vec{K}_1^+ \vec{r} \vec{K}_1 \vec{r} + \vec{K}_2^+ \vec{r} \vec{K}_2 \vec{r}) + \\
&+ \frac{4\pi}{3}(\vec{K}_1^+ \vec{K}_1 + \vec{K}_2^+ \vec{K}_2) \delta(r) \quad (10)
\end{aligned}$$

sowie:

$$\frac{4\pi}{q^2} \vec{q}^2 \rightarrow 4\pi \delta(r) \quad (11)$$

$$\frac{4\pi}{q^2} \vec{q} \rightarrow i \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (12)$$

$$\frac{4\pi}{q^2} \vec{p} (\vec{S}_1 + \vec{S}_2) \times \vec{q} \rightarrow -\frac{i}{r^3} (\vec{S}_1 + \vec{S}_2) (\vec{p} \times \vec{r}) \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{q^2} (\vec{S}_1 \times \vec{q})(\vec{S}_2 \times \vec{q}) &\rightarrow \frac{1}{r^3} (\vec{S}_1 \vec{S}_2 - 3 \frac{\vec{S}_1 \times \vec{r} \vec{S}_2 \times \vec{r}}{r^2}) \\
&+ \frac{4\pi}{3} \vec{S}_1 \vec{S}_2 \delta(r) \quad (14)
\end{aligned}$$

Mit den Formeln (7) - (14) erhalten wir nach einer Ordnung nach Potenzen von r das Potential im Ortsraum Gl. (6.19).

Maßsysteme und Metrik

=====

Metrik

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} (+1, -1, -1, -1)$$

$$a_{\mu} a_{\mu} = a_0^2 - \vec{a}^2$$

Maßsystem: $\hbar = c = 1$

$$e^2 = 1/137 = 7.29927 \cdot 10^{-3}$$

$$1 \text{ MeV} = 1/197.32857 \text{ fermi}^{-1} = 5.067689 \cdot 10^{-3} \text{ fermi}^{-1}$$

$$1 \text{ MeV} = 1/6.58317 \cdot 10^{22} \text{ sec}^{-1} = 1.519025 \cdot 10^{21} \text{ sec}^{-1}$$

$$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2 = 10^2 \text{ fermi}^2$$

$$1 \text{ MeV}^{-1} = 6.240078 \cdot 10^2 \text{ mb}^{1/2}$$

Relativistische Invarianten (Mandelstam Variablen)

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_4 + p_3)^2$$

$$t = (p_3 - p_1)^2 = (p_4 - p_2)^2$$

$$u = (p_4 - p_1)^2 = (p_3 - p_2)^2$$

$$s+t+u = \sum_{i=1}^4 m_i^2$$

Eigenschaften einiger interessanter Kerne mit Spin 1

Kern	Lebens- dauer	Masse	Zerfall	Spin I	μ (μ_n)	Q (barn)
${}^6_3\text{Li}$	∞	6.01512 au 5603.089 MeV	-	1	+0.82202	-0.0008
${}^{14}_7\text{N}$	∞	14.00307 au 13046.93 MeV	-	1	+0.4036	+0.0016
${}^{108}_{47}\text{Ag}$	2.42m		β^+ , EC, β^-	1	+ 2.8	?
${}^{242}_{95}\text{Am}$	16. h		β^- , EC	1	$\pm$ 0.382	$\pm$ 2.8

Literaturverzeichnis

- ¹ A.Proca, J.de Phys. et Rad., 7, 347 (1936).
- ² N.Kemmer, Proc. Cambr. Phil. Soc., 39, 189 (1943).
- ³ E.C.G.Stueckelberg, Helv. Phys. Acta, 11, 225 (1938).
- ⁴ W.J.Hurley, Phys. Rev., D4, 3605 (1971); D10, 1185 (1974); D3, 2339 (1971); Phys. Rev. Lett., 29 , 1475 (1972).
- ⁵ S.Weinberg, Phys. Rev., 133B, 1318 (1964).
- ⁶ N.Nakanishi, Phys. Rev., D5, 1324 (1972).
- ⁷ D.Shay and H.Good jr., Phys. Rev., 179, 1410 (1969).
- ⁸ R.W.Hayward, The Dynamics of Fields of Higher Spin, Preprint (1975); M.Danos and V.Gillet, Relativistic Many-Body Bound Systems, Preprint DPH-T/74/66.
- ⁹ Handbook of Chemistry and Physics, Edited by R.C. Weast (Chemical Rubber Publishing Co., Cleveland, Ohio, 1973-1974) 54th Ed.
- ¹⁰ K.Johnson and E.C.G.Sudarshan, Ann. Phys., 13, 126 (1961).
- ¹¹ G.Velo and D.Zwanziger, Phys. Rev. 188, 2218 (1969); 186, 1337 (1969).
- ¹² W.J.Rarita and J.Schwinger, Phys. Rev., 60, 61 (1941).
- ¹³ A.S.Wightman, Proc. 5th. Coral Gables Conference on Symmetry,Principles at High Energy, Miami, 1968 Eds. A. Perlmutter et al. (New York, Benjamin).

- ¹⁴ I.M.Gelfand and A.M.Yaglom, Zh. Exsp. Teor. Fiz., 18, 703 (1948).
- ¹⁵ I.M.Gelfand, R.A.Minlos and Shapiro, Representations of the Rotation and Lorentz Groups and their Application (Pergamon Press, Oxford, 1963).
- ¹⁶ H.J.Bhaba, Rev. Mod. Phys. 17, 200 (1945).
- ¹⁷ A.Z.Capri, Phys. Rev. 178, 2427 (1969).
- ¹⁸ S.Shamalyand A.Z.Capri, Nuovo Cimento, 2B, 2368 (1971).
- ¹⁹ W.J.Hurley and E.C.G.Sudarshan, Ann. Phys., 85, 546 (1974).
- ²⁰ H.Umezawa, Quantum Field Theory, (North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1956).
- ²¹ T.D.Lee and C.N.Yang, Phys. Rev., 128, 885 (1962).
- ²² P.A.Carruthers, Spin and Isospin in Particle Physics, (Gordon and Breach, New York, 1971).
- ²³ J.D.Bjorken and S.D.Drell, Relativistische Quantenfeldtheorie, (B.I. Hochschultaschenbücher, 101/101*, 1967).
- ²⁴ M.Jacob and G.C.Wick, Ann. Phys., 7, 404 (1959).
- ²⁵ M.Fierz and W.Pauli, Proc. Roy. Soc. 173A, 211 (1939).
- ²⁶ S.M.Bilenkij, Introduction to Feynman Diagrams, (Pergamon Press, Oxford-Braunschweig, 1974).
- ²⁷ N.N.Bogoliubov and Shirkov, Relativistic Quantum Field Theory, (Interscience Pub., New York and London, 1959).

- 28 L.D.Landau et E.Lifshitz, Physique Theorique IVa,
(Ed. Mir, 1972).
- 29 H.Pilkuhn, The Interactions of Hadrons, (John Wiley,
New York, 1967).
- 30 Review of Particle Properties, Phys. Lett., 50B, No1
(1974).
- 31 H.A.Bethe and E.E.Salpeter, Quantum Mechanics of One
and Two Electron Atoms, (Springer Verlag, Berlin-
Göttingen-Heidelberg, 1957).
- 32 D.Fick, Einführung in die Kernphysik mit Polarisierten
Teilchen, (B.I. Hochschulschriften, 755/755A*, Mannheim,
1971).
- 33 Polarisation Nuclear Physics, Ed. D.Fick, Lecture Notes
in Physics 30, (Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-
New York, 1973).
- 34 Landhold-Börnstein, I.Band, Teil 5, (Springer Verlag,
Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1952).
- 35 M.L.G.Redhead, Proc. Roy. Soc. London, 220, 219 (1953);
A.Achiezer and Polovin, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 90, 55
(1953); L.M.Brown and P.M.Feynman, Phys. Rev., 85,
231 (1952); McKinley and H.Feshbach, Phys. Rev., 74,
1759 (1948); S.Gasiorowicz, Elementary Particle
Physics (John Wiley & Sons, Inc., 1967); N.F.Mott,
Proc. Roy. Soc. (London), A124, 425 (1929); H.A.
Tolhoek, Rev. Mod. Phys., 28, 277 (1956); R.H.Dalitz,
Proc. Roy. Soc. (London), A206, 509 (1951).

- 36 H.Joos, Fortschritte der Physik, 10, 65 (1962).
- 37 C.R.Hagen, Phys. Rev., D4, 2204 (1971).
- 38 V.Frank, Nucl. Phys., B59, 429 (1973).
- 39 A.K.Nagpal, Nucl. Phys. B72, 359 (1974).
- 40 E.J.Williams, Proc. Roy. Soc. London, 169, 531 (1939).
- 41 F.Belinfante, Phys. Rev., 92, 997 (1953).
- 42 J.B.Marion, Classical Dynamics of Particles and Systems, (Academic Press, New York and London, 1965).
- 43 R.F.Streater and A.S.Wightman, P.C.T. Spin and Statistics and All That (Benjamin, New York, 1964).
- 44 H.J.Massey and H.C.Corben, Proc. Camb. Phil. Soc. 35, 463 (1939); H.Cheng and T.T.Wu, Phys. Rev., D5, 2978 (1972).
- 45 S.T. Ma, Phys. Rev. 62, 403 (1942).
- 46 E.Rutherford, Phil.Mag., 21, 669 (1911).
- 47 N.F.Mott, Proc. Roy. Soc., A126, 259 (1930).
- 48 J.Chadwick, Proc. Roy. Soc., A128, 120 (1930); N.P. Heydenburg and G.M.Temmer, Phys. Rev. 104, 123 (1956).
- 49 Chr.Möller, Annalen der Physik, 14, 531 (1932).
- 50 A.Ashkin, L.A.Page and W.M.Woodward, Phys. Rev., 94, 357 (1954).
- 51 A.M.Bincer, Phys.Rev., 107, 1434 (1957)
- 52 P.S.Cooper et al., Phys.Rev.Lett., 34, 1589 (1975)

Bezeichnungen

- α, β Parameter der Potentiale
 a, a^+ Teilchenvernichtungs- und Teilchenerzeugungsoperator
 A_μ Elektromagnetisches Potential
 $\beta_\mu, \beta_{\mu\nu}$ Koeffizientenmatrizen der Wellengleichungen
 c Lichtgeschwindigkeit
 e Elementarladung
 E Relativistische Energie
 $\delta_{\mu\nu}$ Kronecker Symbol
 f Helizitätsspinor der Hurley Theorie
 $F_{\mu\nu}$ Elektromagnetischer Feldtensor
 φ_μ Viererfeld der Proca Theorie
 φ Azimutwinkel
 $g_{\mu\nu}$ Metrischer Tensor
 $G_{\mu\nu}$ Feldtensor der schweren Spin 1 Teilchen
 g_m Magnetischer Formfaktor
 g_a, g Landé-Faktoren
 h Plancksches Wirkungsquantum
 $I_{\mu\nu}, \vec{J}, \vec{N}, \vec{X}, \vec{Y}$ Generatoren der Lorentzgruppe
 j_μ Viererstrom
 j_μ^{ij} Strommatrix
 $\hat{j}_\mu$ Stromoperator in der zweiten Quantelung
 K_i Spinmatrizen
 l Dimension der Darstellung der Lorentzgruppe
 L Lagrangedichte
 $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ Helizitäten
 m Masse der Teilchen
 m_p Protonenmasse

- $\mathbb{M}$ Streuamplituden
 μ Magnetisches Dipolmoment
 N Normalordnungsoperator
 P_1, P_2, P_3, P_4 Viererimpulse
 $\omega_{\mu\nu}$ Parameter der Lorentzgruppe
 P_i, P_{ij} Vektorpolarisation und Tensorpolarisation
 ψ Wellenfunktion der Hurley Theorie
 r relative Entfernung
 Q_{ij} Quadrupoloperator
 q_μ Impulsübertrag
 ρ Dichtematrix
 $d\Omega$ Raumwinkelelement
 S Streumatrix
 s Spin
 s, t, u Mandelstamvariablen
 S_i, S_{ij} Spinmatrizen und Spintensor
 σ Streuquerschnitt
 s_1, s_2 Parameter der Darstellung der Lorentzgruppe
 T Zeitordnungsoperator
 $T_{\mu\nu\rho\sigma}$ Tensor vierter Stufe
 θ Streuwinkel
 U Zweikörperpotential
 $w(\lambda)$ Wahrscheinlichkeitsdichte des Zustandes mit
 Helizität λ
 Z Ladungszahl

Zum Schluß möchte ich Herrn Professor W.Greiner für die Anregung und Unterstützung der Arbeit sowie den Herrn Professoren W.Scheid, M.Danos, G.Clausnitzer, S.T.Belyaev, A.Sandulescu und meinen Kollegen G.Soff, V.Ruck, J.Kirsch und V.Oberacker für kritische Anmerkungen danken.

Während der numerischen Auswertung der Formeln wurde ich von dem Team des GSI Rechenzentrums Darmstadt, und Herrn F.Weik von der T.H. Darmstadt freundlich beraten.

L e b e n s l a u f

Am 2. Juli 1946 wurde ich - Herbert Michael Ruck - in Einbeck, Niedersachsen, geboren. 1947 zog meine Mutter mit mir nach Hermannstadt, Rumänien. Hier besuchte ich von 1953 bis 1960 die deutsche Grundschule und von 1960 bis 1964 das deutsche allgemeinbildende Lyzeum, an dem ich im Juni 1964 das Abitur ablegte. 1964 bis 1965 absolvierte ich ein Semester am Lehrerseminar in Hermannstadt. Von Oktober 1965 bis Juni 1970 studierte ich Physik an der Universität zu Klausenburg, an der ich das Diplom in Physik mit Auszeichnung erwarb. 1970 bis 1973 war ich als wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für theoretische Physik der Universität Klausenburg tätig. Im Mai 1973 kehrte ich als Aussiedler in die Bundesrepublik Deutschland zurück. Seit Juni 1973 bin ich am Institut für Theoretische Physik der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt am Main als wissenschaftlicher Mitarbeiter tätig.

Meine akademischen Lehrer waren:

Prof.W.Greiner, Prof.W.Scheid, Prof.Z.Gabos, Prof.M. Draganu, Prof.V.Mercea, Prof.I.Ursu, Prof.A.Weissmann, Prof.H.Tintea, Prof.E.Schechter, Prof.F.Constantinescu, Prof.A.Bodi.

